RACE - Revista de Administração do Cesmac
Volume 9, 2021
ISSN 2675-3766

POR QUE A ÁGUA GELADA ESQUENTA RAPIDAMENTE E O CAFÉ QUENTE ESFRIA RAPIDAMENTE?

WHY DOES THE COLD WATER HEAT UP QUICKLY AND THE HOT COFFEE COOL DOWN QUICKLY?

Edel Alexandre Silva Pontes[1]

RESUMO: As equações diferencias desempenham um papel extremamente importante nas áreas de ciências exatas e engenharia. Resolver uma equação diferencial constitui encontrar uma família de curvas integrais que satisfaça ao modelo proposto. Este estudo objetivou investigar a equação diferencial ordinária (EDO) linear de 1º ordem de forma a responder alguns questionamentos: Por que a água gelada, se não beber logo, esquenta rapidamente, no meio ambiente? Por que o café quente, se não tomar logo, esfria rapidamente, no meio ambiente? Metodologicamente, a ideia do trabalho é mostrar a solução de uma EDO linear de 1º ordem e simular um experimento para saber o que acontece com as duas situações, da água e do café, durante um intervalo de tempo. Espera-se que as aplicações aqui apresentadas possam auxiliar o professor de cálculo no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação superior.
Palavras-chave: Ensino e aprendizagem de matemática; Equação diferencial;. Lei de aquecimento e resfriamento de Newton.

ABSTRACT: Differential equations play an extremely important role in the areas of exact sciences and engineering. Solving a differential equation constitutes finding a family of integral curves that satisfies the proposed model. This study aimed to investigate the 1st order linear ordinary differential equation (ODE) in order to answer some questions: Why does cold water, if you don't drink it soon, get hot in the environment? Why does hot coffee, if not taken soon, cool quickly in the environment? Methodologically, the idea of the work is to show the solution of a linear first order ODE and simulate an experiment to find out what happens with the two situations, water and coffee, over a period of time. It is hoped that the applications presented here can assist the calculus teacher in the process of teaching and learning mathematics in higher education.
Keywords: Teaching and learning mathematics. Differential equation. Newton's heating and cooling law.

1. INTRODUÇÃO

Diante de todo avanço cientifico e tecnológico do mundo contemporâneo, percebe-se cada vez mais a presença da matemática para comprovar fenômenos da natureza e das coisas. Diversos pesquisadores matemáticos desenvolvem seus estudos na proposta de encontrar soluções de determinadas equações diferenciais, com problemas interessantes e desafiadores que ainda não foram resolvidos. De acordo com Pontes (2018), as equações diferenciais podem descrever diversos fenômenos naturais, desde a física a biologia.

> A matemática é uma ciência da natureza e por ter característica abstrata e de linguagem complexa faz-se dela uma referência de mais alta ordem para a compreensão dos

[1] Instituto Federal de Alagoas. edel.pontes@ifal.edu.br

> fenômenos e efeitos do universo e do processo de construção do conhecimento. O entendimento de modelos matemáticos cria euforia para aquele que ensina e expectativa para aquele que aprende (PONTES, 2019a, p.16).

A motivação deste trabalho se deve a uma palestra que ministrei sobre problemas de olimpíada de matemática em uma escola secundária da cidade de Maceió. O público presente neste evento era de estudantes do terceiro ano do ensino médio interessados em participar ativamente da Olimpíada Brasileira de Matemática – OBM, além de um garoto de 12 anos, irmão de um dos estudantes, que assistia ao colóquio com muita atenção. “A matemática ensinada nas escolas e a realidade do mundo atual caminham em sentidos antagônicos, em uma verdadeira desarmonia” (PONTES, 2018, p.4)

Nesta ocasião, no final da apresentação, fiquei disponível para responder as dúvidas que pudessem advir e, para minha surpresa, o jovem mais novo da sala me fez o seguinte questionamento:

Jovem: Professor, por que a água gelada se eu não beber logo, ela esquenta? E por que o café quente, se eu não beber logo ele esfria?

Eu: Que bela pergunta! Mas, alguma razão para compreender esse fenômeno?

Jovem: Eu perguntei a minha tia e ela me respondeu que foi Deus que fez assim. Mas, eu queria uma resposta técnica. O senhor é capaz?

Uma das coisas que me faz prosseguir a me dedicar incansavelmente ao estudo da matemática e de seus modelos é quando me sinto desafiado intelectualmente. Continuei:

Eu: Claro, meu jovem rapaz! Este fenômeno é nada mais que um problema de aquecimento e resfriamento de Newton.

Jovem: Caramba!

Eu: É nada mais que uma Equação Diferencial Ordinária Linear de 1º ordem, que diz: a taxa da temperatura é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio.

Jovem: Não entendi. Pode explicar?

Eu: Pois, não.

Por mais carência de conteúdos matemáticos que este jovem contivesse, não poderia ter o prazer de negar o desafio e deixa-lo com mais imprecisões. Desta forma, fomos ao quadro negro, acompanhado também pelos estudantes, e nos aprazemos por alcançar algo tão peculiar e presente na vida de qualquer indivíduo. “No ensino de matemática, em qualquer que seja o nível, é fácil perceber diversas inquietações e indagações de alunos sobre sua real aplicabilidade, contextualidade, utilidade e compreensão” (PONTES, 2019b, p.194).

Deste modo, este trabalho objetivou investigar matematicamente a equação diferencial ordinária linear de 1º ordem de forma a responder as seguintes indagações:

a. Por que a água gelada esquenta rapidamente, no meio ambiente?

b. Por que o café quente esfria rapidamente, no meio ambiente?

Na seção seguinte, definiremos uma equação diferencial de ordem *n* e apresentaremos a solução de uma equação diferencial ordinária linear de 1º ordem. Em seguida, exibiremos um modelo matemático de Issac Newton para resolução de problemas associados a aquecimento e resfriamento de um corpo, além de responder os dois questionamentos sugeridos. Por fim, faremos nossas considerações finais.

2. EQUAÇÃO DIFERENCIAL ORDINÁRIA

Em diversas áreas do conhecimento, regularmente aspiramos modelar matematicamente o comportamento de alguns fenômenos. "Um modelo matemático de um sistema físico geralmente envolve a variável tempo. A solução do modelo representa então o estado do sistema, [...] os valores da variável dependente (ou variáveis) descrevem o sistema no passado, presente e futuro" (ZILL, 2001, p.14). "Um modelo matemático de um fenômeno ou de uma situação é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que o representam" (JAVARONI, 2007, p.26). Muitas vezes, o modelo matemático do fenômeno proposto é uma equação diferencial. A construção do modelo abrange uma astúcia da conjuntura real em linguagem estritamente matemática.

Nesta configuração, o principal desafio que se expõe nas equações diferenciais é estabelecer os princípios e relações que propõem o problema a partir de um conjunto limitado de informações sobre o comportamento geral do modelo, enunciando de maneira precisa todas as hipóteses imprescindíveis para sua compreensão. "Uma das principais razões da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples são capazes de representar sistemas úteis" (THOMAS, 2013, p.2).

A Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem *n* é toda equação, $F(x, y, \frac{dY}{dx}, \frac{d^2Y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^nY}{dx^n}) = 0$, que possui uma função incógnita Y e suas derivadas. Zill (2001), Boyce e DiPrima(2002), Pontes (2018) afirmam que resolver uma equação diferencial constitui encontrar uma família de curvas adequada. Uma EDO de 1º ordem é uma equação da forma $F(x, y, \frac{dY}{dx}) = 0$.

> As equações diferencias desempenham um papel muito importante na engenharia e nas ciências exatas. Muitos problemas conduzem a uma ou várias equações diferenciais que

> deverão ser resolvidas. O tipo de equações que têm recebido maior atenção são as equações diferenciais lineares, o que justifica o fato existirem técnicas analíticas para resolver esse tipo de equações (MIOTTO, CARGNELUTTI & MACHADO, 2013, p.2).

Uma EDO da forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$, onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções continuas em certo intervalo I, é chamada equação linear.

Para encontrar a solução da equação linear, deve-se usar o fator integrante $e^{\int P(x)dx}$. Desta forma, multiplicando ambos os membros da equação pelo fator integrante sugerido, temos;

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

E conferimos, pela regra da cadeia, que podemos expressá-la como:

$$\frac{d}{dx}[ye^{\int P(x)dx}] = e^{\int P(x)dx}Q(x).$$

Integrando, temos:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C$$

Daí,

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Portanto, a solução geral da EDO linear de 1º ordem concebe uma família de curvas integrais representada na forma $y = e^{-\int P(x)dx}(\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + C)$, onde C é uma constante arbitrária.

3. LEI DE AQUECIMENTO E RESFRIAMENTO DE NEWTON

O físico e matemático Isaac Newton (1643 – 1727) publicou um artigo intitulado "*Scala Graduum Caloris*", em que expõe um método para medir temperaturas de até 1000℃. Newton afirmava que a taxa de diminuição da temperatura de um corpo (T) em relação ao tempo (t) é proporcional à diferença de temperaturas entre o corpo (T) e o meio ambiente (T_m).

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),\ k \text{ é uma constante de proporcionalidade.}$$

Pela solução de uma EDO linear de 1º ordem, temos:

$$T(t) = T_m + Ce^{-kt}.$$

Assim, temos subsídios suficientes para responder as indagações do jovem estudante sobre o aquecimento da água gelada e do resfriamento do café.

Por que a água gelada, com temperatura inicial 0^oC, esquenta rapidamente, no meio ambiente? Em relação à água gelada, nota-se que a família de curvas integrais que definem o seu aquecimento é: $T(0) = T_m + C$, no instante inicial $t = 0$, como $T(0) = 0$, temos que $T_m = -C$. Assim sendo, $T(t) = T_m - T_m e^{-kt} = T_m\left(1 - e^{-kt}\right)$.

A ideia é fazer uma experiência simulando a temperatura do corpo, no caso a água gelada, durante um intervalo de tempo. Quanto tempo à água gastará para atingir a temperatura do meio? Suponha que a temperatura do meio ambiente esteja em 25º C e no primeiro minuto á água aqueceu para 5º C, isto é, $T(1) = 5$. Como $T(0) = 0$, temos: $T = 25\left(1 - e^{-kt}\right) \therefore 5 = 25\left(1 - e^{-k}\right) \therefore k = 0{,}287682$, temos, $T = 25(1 - e^{-0{,}287682t})$.

Pela Tabela 1, percebe-se que à medida que aumenta o tempo, a temperatura da água se aproxima da temperatura do meio. Em torno de 12 minutos, a água estará próximo da temperatura do meio, em 25º C. A água estará quente para beber!

Tabela 1: Comportamento do resfriamento do café quente, em relação ao tempo.

$\boldsymbol{T = 25\left(1 - e^{-0{,}287682t}\right)}$	
Temperatura (Graus Celsius)	Tempo (minutos)
Zero	Zero
5º C	1 minuto
10º C	1,8 minutos
15º C	3,9 minutos
20º C	5,6 minutos
24º C	11,2 minutos

Fonte: Elaboração do Autor.

Por que o café quente, com temperatura inicial 100^oC, esfria rapidamente, no meio ambiente? Em relação ao café quente, observa-se que a família de curvas integrais que definem o seu esfriamento é: $T(0) = T_m + C$, no instante inicial $t = 0$, como $T(0) = 100$, temos que $T_m + C = 100$. Assim sendo, $T(t) = T_m + (100 - T_m)e^{-kt}$.

Seguindo a mesma ideia da simulação anterior, no caso agora do café quente, durante um intervalo de tempo, temos: quanto tempo o café quente gastará para atingir a temperatura do meio ambiente? Suponha que a temperatura do meio ambiente esteja em 25º C e no primeiro minuto o café esfriou para 80º C, isto é, $T(1) = 80$. Como $T(0) = 100$, temos: $T = 25 + 75e^{-kt} \therefore 80 = 25 + 75e^{-k} \therefore k = 0{,}310159$, temos, $T = 25 + 75e^{-0{,}310159t}$.

Pela Tabela 2, observa-se que à medida que aumenta o tempo, a temperatura do café se aproxima da temperatura do meio ambiente. Em torno de 14 minutos, o café estará próximo da temperatura do meio, nesta simulação 25º C. O café estará frio para beber!

Tabela 2: Comportamento do resfriamento do café quente, em relação ao tempo

$$T = 25 + 75e^{-0,310159t}$$

Temperatura (Graus Celsius)	Tempo (minutos)
100º C	Zero
80º C	1 minuto
50º C	3,5 minutos
40º C	5,2 minutos
30º C	8,6 minutos
26º C	14 minutos

Fonte: Elaboração do Autor.

Uma vez que nossa proposta era responder duas perguntas extremamente usuais no cotidiano de qualquer individuo, pode-se perceber que a missão foi cumprida em sua totalidade. As EDOs mostram-se uma ferramenta de grande relevância, já que admite que se averigue antecipadamente se a equação matemática empregada para modelar o problema verdadeiramente se adapta ao fenômeno descrito pelo modelo.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram respondidos dois questionamentos, de um jovem estudante, sobre a lei de aquecimento e resfriamento de Newton por meio das EDO lineares de 1º ordem. Temas salientes com modelos apropriados, que aproximem o estudante do seu cotidiano, diminuem drasticamente a evasão e a retenção acadêmica. "A escola atual tem um papel decisivo de minimizar defasagens entre o cotidiano tecnológico das crianças e as abstrações naturais definidas nas bancas escolares" (PONTES, 2019, p.115)

> Os alunos apresentam muita dificuldade para interpretar, entender matemática, pensar simultaneamente de modos diferentes, entender a conexão entre a EDO e o sistema real modelado, interpretar os termos de uma EDO, pois não desenvolveram esta capacidade e sim, passaram muito tempo da vida escolar repetindo e memorizando técnicas (DULLIUS, VEIT & ARAUJO, 2013, p. 225).

As aplicações aqui desenvolvidas podem auxiliar fortemente o professor de cálculo dos cursos de ciências exatas e engenharia no processo de ensino e aprendizagem de matemática na educação superior. "Os alunos finalizam os cursos clássicos de EDO com pouca compreensão sobre o que representam as soluções de EDO numa situação aplicada" (DULLIUS, VEIT & ARAUJO, 2013, p. 211).

O uso das EDOs torna-se um momento especial para que os estudantes entendam as diversas formas como a matemática pode ser empregada no dia a dia. O atual perfil dos cursos superiores nas áreas de exatas, tanto licenciatura como bacharelado, admite criar estruturas, na prática pedagógica, para diminuir a defasagem entre o que se oferece como teoria e o que se emprega como prática. "O mundo científico e tecnológico evolui exponencialmente e a cada momento se faz necessário um maior entendimento dos modelos matemáticos para uma real compreensão dos fenômenos que ocorrem na era atual" (PONTES, 2020, p. 1174)

Pode-se afirmar que existem diversas maneiras de expor um modelo matemático, em qualquer que seja o nível de ensino, basta apenas, que as etapas e tarefas da proposta pedagógica definida estejam dentro dos pré-requisitos estabelecidos. Espera-se que outras propostas para o ensino e aprendizagem das EDOs possam ser discutidas em outros estudos, buscando sempre a melhoria do desempenho acadêmico do estudante.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E. ; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** 7 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

DULLIUS, Maria Madalena; VEIT, Eliane Angela; ARAUJO, Ives Solano. Dificuldades dos alunos na aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 2, p. 207-228, 2013.

FERNANDEZ, Oscar E. **Por que o café esfria tão rápido?: e outras aplicações do cálculo no seu dia**. Editora Blucher, 2016.

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica**: possibilidades para o ensino e aprendizagem de introdução às equações diferenciais ordinárias. 2007. 231 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2007.

MIOTTO, Carina Muniz; CARGNELUTTI, Jocelaine; MACHADO, Vinicio Mileski. Aplicações das equações diferenciais na modelagem Matemática da dilatação/contração térmica de cabos da rede elétrica. **I Semana da Matemática da UTFPR–Perspectivas do Ensino e da Pesquisa em Matemática. Toledo**, v. 18, 2013.

PONTES, Edel Alexandre Silva. A matemática na educação infantil: um olhar educacional sob a ótica da criatividade. **Diversitas Journal**, v. 5, n. 2, p. 1166-1176, 2020.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Emphasis on Mathematical Modeling: The Problems of Contour Values in Calculating the Deflection of a Beam. **International Journal of Advanced Engineering Research and Science**, v. 5, n. 12, p. 268258.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Os Quatro Pilares Educacionais no Processo de Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología**, n. 24, p. e02-e02, 2019.

PONTES, Edel Alexandre Silva. A Capacidade de Gerar Soluções Eficientes e Adequadas no Processo Ensino e Aprendizagem de Matemática. **Revista Psicologia & Saberes**, v. 8, n. 10, p. 193-205, 2019.

PONTES, Edel Alexandre Silva. O professor ensina e o aluno aprende: questões teóricas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. **RACE-Revista de Administração do Cesmac**, v. 4, p. 111-124, 2019.

PONTES, Edel Alexandre Silva et al. Abordagens Imprescindíveis no Ensino Contextualizado de Matemática nas Séries Iniciais da Educação Básica. **RACE-Revista de Administração do Cesmac**, v. 1, p. 3-15, 2018.

THOMAS, Lucas Rangel. O uso de equações diferenciais na modelagem de sistemas naturais e outros. 2013. 34f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Ciências Naturais) – Universidade de Brasília.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. Equações Diferenciais. 3 ed. São Paulo: Markron Books, 2001. v. 2.