

---

## ISOMORFISMO BÁSICO ESTRUTURAL NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: A SIMILARIDADE ENTRE A EQUAÇÃO $x + y + z = 15$ , O JOGO DA VELHA E O QUADRADO MÁGICO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA

BASIC STRUCTURAL ISOMORPHISM IN PROBLEM SOLVING: THE SIMILARITY BETWEEN THE EQUATION  $X + Y + Z = 15$ , THE TIC TAC TOE AND THE MAGIC SQUARE IN THE MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING PROCESS

Edel Alexandre Silva Pontes<sup>1</sup>

Edel Guilherme Silva Pontes<sup>2</sup>

---

**RESUMO:** Diversos pesquisadores em Educação Matemática e áreas afins têm discutido alternativas pedagógicas que possam aperfeiçoar o processo de ensino e aprendizagem de matemática nos diversos níveis de educação. Este estudo objetivou examinar a similaridade isomorfa entre a equação matemática  $x + y + z = 15$ , o jogo da velha e o quadrado mágico de ordem três, permitindo extrair o máximo de questionamentos como sugestão para melhorar o ato de ensinar e o ato de aprender matemática. Entende-se que nosso trabalho está centralizado em oferecer uma sugestão pedagógica motivadora para ensinar e aprender matemática por meio de estruturas isomorfas, desenvolvendo nos alunos aptidões cognitivas para empregá-las eficientemente na sua vida cotidiana. Estudos futuros abrangendo a resolução de problemas isomorfos necessitam ser administradas em outros níveis de ensino para melhor perceber as causas e efeitos no processo de ensinar e aprender matemática

**Palavras-chave:** Ensino e aprendizagem de matemática. Estruturas isomorfas. Jogo da velha. Quadrados mágicos

**ABSTRACT:** Several researchers in Mathematics Education and related fields have discussed pedagogical alternatives that can improve the process of teaching and learning mathematics at different levels of education. This study aimed to examine the isomorphic similarity between the mathematical equation  $x + y + z = 15$ , the tic-tac-toe and the magic square of order three, allowing to extract the maximum of questions as a suggestion to improve the act of teaching and the act of learning mathematics. It is understood that our work is centered on offering a motivating pedagogical suggestion to teach and learn mathematics through isomorphic structures, developing in students cognitive skills to use them efficiently in their daily life. Future studies covering the resolution of isomorphic problems need to be administered at other levels of education to better understand the causes and effects in the process of teaching and learning mathematics

**Keywords:** Teaching and learning mathematics. Isomorphic structures. Hash. Magic squares

---

<sup>1</sup> Pesquisador e Professor Titular do Instituto Federal de Alagoas. [edel.pontes@ifal.edu.br](mailto:edel.pontes@ifal.edu.br)

<sup>2</sup> Pesquisador e Professor Titular da Universidade Estadual de Alagoas. [edel@uneal.edu.br](mailto:edel@uneal.edu.br)

## 1. INTRODUÇÃO

Os pesquisadores em Educação Matemática buscam incansavelmente, a todo o momento, alternativas pedagógicas que melhorem o processo de ensino e aprendizagem de matemática nos diversos níveis de educação. “O século XX, século de muitas reformas no ensino de Matemática, passou a entender, porém, que ensino e aprendizagem deveriam ocorrer simultaneamente” (Onuchic & Allevato, 2011, p.80).

O ensino e aprendizagem de Matemática estar sujeito a uma grande multiplicidade de regras clássicas que torna sua instrução bastante metódica e complexa. “Faz-se necessário, na contemporaneidade, propor situações, no ensino e aprendizagem de matemática, que possam minimizar o abismo existente entre a teoria estudada e a prática real” (Pontes, 2019a, p.4). É preciso estimular o pensamento matemático do aprendiz e fortalecer sua capacidade de resolver problemas, de modo a abrandar as defasagens entre a prática escolar e o cotidiano do indivíduo.

A resolução de um problema deve seguir uma estratégia que leve o desafiante a utilizar toda sua criatividade e conhecimento em busca da solução ideal. Sternberg (2010) afirma que um problema a ser resolvido é aquele que não possui, ainda, uma resposta imediata, conseqüentemente, para resolvê-lo é preciso que o sujeito possa descrever todos os passos do ciclo da resolução do problema. “Não se pode ignorar a necessidade de repensar no modelo atual de ensino, onde o aluno seja o centro de todo o processo educativo, que se possa valorizar suas habilidades, criatividade, intuição e autoconhecimento” (Pontes, 2019b, p.).

Conforme Biembengut e Hein (2003) é imprescindível que o professor possa optar por recomendar modelos, para recriar em sala de aula, ao lado dos alunos, seguindo a proposta inicialmente sugerida e o nível em questão.

Este artigo objetivou examinar a similaridade isomorfa entre a equação matemática  $x + y + z = 15$ , o jogo da velha e o quadrado mágico de ordem três, permitindo extrair o máximo de questionamentos como sugestão para melhorar o ato de ensinar e o ato de aprender matemática, nos diversos níveis de ensino.

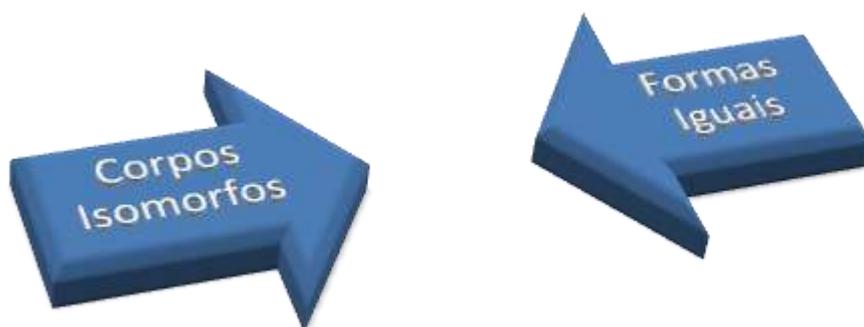
A justificativa plausível para esse trabalho é pelo fato de utilizarmos uma estrutura matemática isomorfa em busca do aprimoramento de conceitos e princípios matemáticos da educação básica, fortalecendo, desta forma, a prática escolar. “Ora, é preciso que o educador consiga relacionar-se com seus educandos assim como eles são de verdade, e não como ele gostaria que fossem” (Barbosa, 1992, p. 20).

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, abordaremos basicamente as considerações e ferramentas que serão necessárias para apresentarmos a sugestão de uma prática pedagógica inovadora e motivadora para o ensino e aprendizagem de matemática para os diversos níveis de educação.

Isomorfismo do ponto de vista algébrico significa uma correspondência biunívoca entre os elementos de dois ou mais grupos, que preserva as operações de ambos, são indistinguíveis dado apenas pela seleção de sua característica (Figura 1).

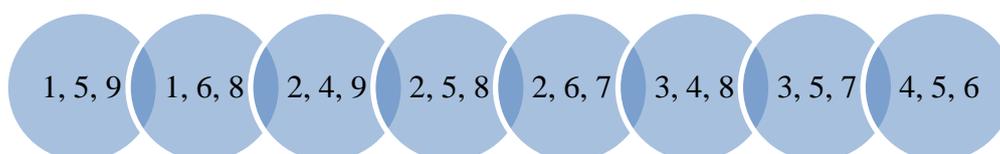
**Figura 1:** Corpos Isomorfos



Fonte: Elaboração dos Autores

Um exercício usual da matemática escolar é propor saber de quantas maneiras podemos selecionar três números distintos, de 1 a 9, de forma que a sua soma seja 15. Observa-se que neste problema as estratégias para resolução estão baseadas em deduzir todas as combinações possíveis (Figura 2).

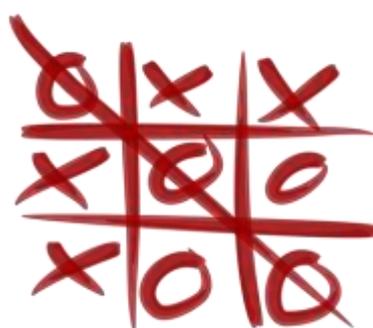
**Figura 2:** Combinações na soma de três números cuja soma é 15



Fonte: Elaboração dos Autores

O jogo da velha (Figura 1) é um passatempo popular de regras extremamente infantil e seu aprendizado é absorvido rapidamente. O jogo é representado por uma matriz de ordem três (três linhas e três colunas) e é jogado por dois jogadores. Cada jogador escolhe uma marcação entre o círculo (O) e o xis (X). Sobre o objetivo, o vencedor do jogo é aquele que obter primeiro preencher três círculos ou três xis, quer em uma linha, coluna ou diagonal. As jogadas são alternadas entre os jogadores, quando um deles consegue o objetivo, costuma-se riscar os três símbolos.

**Figura 3:** Jogo da Velha



Fonte: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/qual-e-a-origem-do-jogo-da-velha/>

Existem 362.880 maneiras diferentes de colocar o círculo ou o xis no tabuleiro, das quais 255.168 maneiras de um jogo vencedor. A chance de o jogo finalizar empatado é grande, estar sujeito se os jogadores jogarem da melhor forma.

Segundo Crowley e Siegler (1993), uma estratégia eficiente é ser o primeiro a jogar e iniciar sua jogada na casa do meio, se o outro jogador, seu adversário, optar por uma casa na borda, faça sua jogada no canto ao lado dessa borda. Desta forma, irá forçar o adversário a se defender, jogando no canto afastado. Daí estabeleça a triangulação, jogando no canto ou borda alinhados ao canto conquistado.

O Quadrado Mágico de ordem 3 (Figura 2) é um desafio matemático na forma de uma tabela quadrada com números dividida em nove quadrados, em que a soma de cada linha (posição horizontal), de cada coluna (posição vertical) e das duas diagonais são iguais.

**Figura 4:** Quadrado M

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Fonte: <https://cienciadegaragem.blogspot.com/2015/09/quadrados-magicos.html>

Todo quadrado mágico de ordem três, qualquer soma na horizontal, vertical ou diagonal é 15. Na construção do quadrado mágico, seu termo central vale 5 e os valores, nos cantos do quadrado, são todos números pares, isto é, 2, 4, 6, 8. Seguindo essa propriedade dos quadrados mágicos de ordem três se obtém facilmente sua construção.

### **3. SUGESTÃO DE UMA PRÁTICA PEDAGÓGICA MOTIVADORA PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA ATRAVÉS DE ESTRUTURAS ISOMORFAS**

Executar um trabalho de reciprocidade entre os alunos empregando princípios matemáticos para a resolução de problemas tem significado um desafio para profissionais da educação, particularmente do professor. A tarefa de resolver problemas está intensamente presente na vida de todo indivíduo, demandando, em muitos casos, estratégias eficientes em busca da solução desejada. “A resolução de problemas é a própria razão do ensino da matemática” (Krulik & Reys, 1997).

Entende-se que nosso estudo está centralizado em oferecer uma sugestão pedagógica motivadora para ensinar e aprender matemática por meio de estruturas isomorfas, desenvolvendo nos alunos aptidões cognitivas para empregá-las eficientemente na sua vida cotidiana. “O bom professor deve fazer com que os alunos aprendam a executar matematicamente muitas situações reais e fictícias para, em seguida, discutir os resultados pensados ou obtidos e enxergá-los como um problema proposto” (Selbach, 2010, p.152).

Muitas vezes, os professores de matemática são questionados por seus alunos sobre a possibilidade de compreender problemas por meio de outras práticas. Diante destas inquietudes, a ideia central do artigo é mostrar um problema matemático algebricamente e

sugerir outras duas formas observáveis equivalentes, por meio de um jogo e de um desafio matemático, como foi apontado na fundamentação teórica. Inicialmente, o professor deve expor, para seus alunos, toda a estrutura isomorfa:

*(Algebricamente)* Dada a equação matemática  $x + y + z = 15$ , tal que  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ,  $x \neq y \neq z$ ,  $x < y < z$  e  $1 \leq x, y, z \leq 9$ . Determine todos os ternos  $(x, y, z)$  que satisfaz a equação proposta.

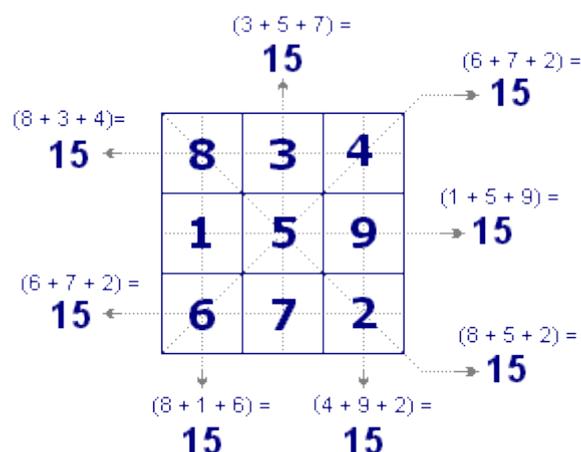
*(Jogo da velha)* No jogo da velha, é possível apresentar uma estratégia para vencer o jogo?

*(Desafio matemático)* Encontre uma estratégia para construir um quadrado mágico de ordem três.

Nota-se que o problema matemático na forma algébrica leva o aluno para uma linguagem puramente matemática e com uma notação extremamente complexa. A partir do momento, que o professor consente disponibilizar outras formas similares na interpretação do problema algébrico, abre-se um leque de oportunidades para os alunos aplicarem toda sua criatividade e raciocínio lógico na intenção de cumprir a tarefa requerida. “Entende-se que, em muitos casos, o ensino da matemática fica preso a sequências padrões que nos levam a um leque de fórmulas decorativas e sem utilização imediata na vida prática” (Pontes, 2018a, p.338).

Percebe-se a forte relação entre os três problemas dispostos: o número de possíveis combinações do problema algébrico (Figura 2, ver em fundamentação teórica) nos mostra todo o preenchimento das linhas, colunas e diagonais do quadrado mágico de ordem três (Figura 5). Constata-se ainda que a estratégia para vencer o jogo da velha (Figura 3, ver em fundamentação teórica) está fundamentada no quadrado mágico de ordem três, bastando apenas que o jogador possa perceber que o objetivo é formar soma 15 em qualquer direção estabelecidas (linha, coluna ou diagonal).

**Figura 5:** Quadrado mágico de ordem três de soma 15



Fonte: [http://www.projetozk.com/mais\\_um/24\\_quadrado\\_magico.htm](http://www.projetozk.com/mais_um/24_quadrado_magico.htm)

Trabalhar com estruturas isomorfas para o ensino e aprendizagem de matemática permite proporcionar uma oportunidade, tanto para o professor como para o aluno, de compreender modelos matemáticos tradicionais por formas mais lúdicas, além de consentir que o aprendiz construa seu ambiente de investigação. “Usar o lúdico e o método da resolução de problemas é uma possibilidade de auxiliar no processo ensino-aprendizagem da matemática, pois estimulam o convívio em grupo, desenvolvem o raciocínio e possibilitam uma aprendizagem divertida” (de Oliveira Santos & de Almeida, 2018, p. 148).

#### 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

É importante frisar que qualquer sugestão metodológica de transformação e aprimoramento na ação de ensinar e aprender matemática merecem ser executadas, pois, desta forma, podemos conjecturar sobre as reais contribuições que esse tipo de tarefa, por problemas isomorfos, pode oferecer a aprendizagem. “A Resolução de Problemas justifica-se em compreender o mundo das formas, das medidas, dos números e das probabilidades, a partir da arte de resolver problemas matemáticos” (Pontes, 2018b, p.45).

Em resposta à problemática que norteou este estudo, percebemos que a partir de problemas isomorfos, pode-se construir uma prática educacional motivadora, valorizando os princípios e relações matemáticas e rompendo com metodologias tradicionais. Evidentemente pelo apresentado, não foi possível realizar um estudo de campo para identificar as possíveis dificuldades dos alunos nas relações matemáticas intrínsecas no modelo.

Espera-se que outras pesquisas com análises mais densas possam ser executadas seguindo uma proposta de utilização de problemas isomorfos como prática pedagógica motivadora no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Estudos futuros abrangendo a resolução de problemas isomorfos necessitam ser administradas em outros níveis de ensino para melhor perceber as causas e efeitos no processo de ensinar e aprender matemática

## REFERÊNCIAS

Barbosa, D. de F. (1992). *O ensino de matemática no 1º e 2º graus*. Tese de doutorado em Psicologia da Educação, PUC/SP, 1992.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2003). *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo.

Crowley, K., & Siegler, R. S. (1993). Flexible strategy use in young children's tic-tac-toe. *Cognitive Science*, 17(4), 531-561.

de Oliveira Santos, V., & de Almeida, V. L. (2018). Matemática e Resolução de Problemas. *REMAT: Revista Eletrônica da Matemática*, 4(1), 147-162.

Krulik, S., & Reys, R. E. (1997). *A resolução de problemas na matemática escolar*. Atual.

Onuchic, L. D. L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema-Mathematics Education Bulletin*, 73-98.

Pontes, E. A. S. (2018). O MODELO BINOMIAL E SUAS APLICAÇÕES NO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA. *Revista Uniabeu*, 11(29), 336-350.

Pontes, E. A. S. (2018). Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. *Revista Sítio Novo*, 2(2), 44-56.

Pontes, E. A. S. (2019). Conceptual questions of a teacher about the teaching and learning process of mathematics in basic education. *Research, Society and Development*, 8(4), 784932.

Pontes, E. A. S. (2019). A Capacidade de Gerar Soluções Eficientes e Adequadas no Processo Ensino e Aprendizagem de Matemática. *Revista Psicologia & Saberes*, 8(10), 193-205.

Selbach, S. et al. (2010). *Matemática e Didática*. Petrópolis: Vozes.

Sternberg, R. J. (2000). *Psicologia cognitiva*. Piccin.