POR QUE A MATEMÁTICA É TÃO EFICAZ NAS CIÊNCIAS FÍSICAS?

Jenner Barretto Bastos Filho
Instituto de Física – Universidade Federal de Alagoas
jenner@fis.ufal.br

Adriano Pereira
Aluno do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas

Amauri da Silva Barros
Instituto de Matemática - Universidade Federal de Alagoas

RESUMO

Neste artigo de cunho pedagógico, partimos da pergunta de Einstein e de Wigner sobre a estupenda eficácia da matemática para se adaptar à realidade física. Defendemos aqui neste artigo a seguinte tese: a eficácia da matemática para dar conta da realidade física está centrada em um isomorfismo parcial entre as estruturas cognitivas de nossa mente e as estruturas do mundo real. Tais estruturas ensejam entre si um diálogo eternamente recorrente. Este diálogo é de natureza adaptativa, complexa e evolutiva e qualquer eventual sucesso, por mais retumbante que seja, não garante qualquer expressão ontológica exata da realidade. De Kant seguimos a sua Revolução Copernicana segundo a qual para conhecer o mundo é necessário impor a ele alguns *a priori* a fim de contorná-lo. De Popper adotamos a sua ressalva à Revolução Copernicana à la Kant segundo a qual por mais necessária que seja a imposição dos elementos *a priori* e por mais sucesso que eles ensejem, não podemos jamais garantir que eles sejam *a priori* verdadeiros, pois continuam sendo eternamente conjecturais. De Einstein adotamos a adoção seletiva dos conceitos como parte constitutiva da livre escolha a fim de contornar a realidade. A realidade física é objetiva e por esta razão apenas responde parcialmente, em adaptação evolutiva e complexa, mediante os *a priori* ensejados pelas estruturas de nossa mente em diálogo eternamente recorrente com as estruturas do mundo exterior. Tal processo pode se revelar sob diversas formas parcialmente bem sucedidas ou não.
Palavras-chave: Realidade Física; Matemática Pura; Eficácia; Correspondência.

ABSTRACT

In this pedagogical article, we start from the question on the effectiveness of mathematics in natural sciences such as pointed out by Einstein and by Wigner. Our thesis here is the following: the effectiveness of mathematics to account for physical reality rests on a partial isomorphism between the cognitive structures of our mind and the structures of the real world. Such structures are able to provide between them an eternally recursive dialogue. This dialogue has a complex, evolutional and adaptive nature and any success, whether small or enormous, does not necessarily constitute any exact ontological expression of reality. From Kant we adopt his *Copernican Revolution* according to which in order to know something about reality we necessarily should impose some *a priori* elements on it. From Popper we adopt the idea that these *a priori* elements are not necessarily *a priori* true ones. From Einstein we adopt the free choice of concepts as a constitutive necessary part in order to describe and to explain some aspects of reality.

Keywords: Physical Reality; Pure Mathematics; Effectiveness; Correspondence.

1. Introdução

> O matemático joga um jogo no qual ele mesmo inventa
> as regras, enquanto o físico joga um jogo no qual as regras
> são inventadas pela Natureza. (P. A. M. Dirac)

Einstein [1] [1],[2] e Wigner [2] [3],[4] manifestaram-se estupefatos com o fato da matemática pura, enquanto disciplina centrada na livre criação do espírito humano, ser capaz de cobrir adequada e brilhantemente tão variados e sutis aspectos da realidade física.

Poderíamos ainda citar Erwin Schrödinger [3] que em suas *Conferências Tarner* proferidas no *Trinity College* de Cambridge em outubro de 1956 se referiu[5] com admiração ao grande feito de Platão conhecido na literatura como o *Mundo das Ideias*.

---

[1] "At this point an enigma presents itself which in all ages has agitated inquiring minds. How can it be that mathematics, being after all a product of human thought which is independent of experience, is so admirably appropriate to the objects of reality? Is human reason, then, without experience, merely by taking thought, able to fathom the properties of real things". (EINSTEIN, ver http://www.gutenberg.org/cache/epub/7333/pg7333.html)

[2] "Neste ponto se apresenta um enigma que em todas as épocas intrigou mentes inquiridoras. Como pode a matemática, sendo um produto do pensamento humano que é independente da experiência, se adaptar assim tão admiravelmente aos objetos da realidade? A razão humana, então, sem experiência, meramente pelo pensamento, é capaz de entender as propriedades das coisas reais". (EINSTEIN, tradução para o português, de nossa responsabilidade, do texto da nota de rodapé precedente na qual se encontra a citação em inglês).

[3] "The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning". (WIGNER, 1960; disponível em: http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

[4] "O milagre da adequação da linguagem matemática para a formulação das leis da física é um dom maravilhoso que nós não entendemos nem merecemos. Nós devemos ser gratos a ele e esperar que ele permaneça válido para futuras pesquisas e que ele se estenda, para o melhor e para o pior, para nosso contentamento, e até mesmo para nossa perplexidade em amplos domínios da aprendizagem" (WIGNER, tradução para o português da nota de rodapé precedente).

[5] "[..] o Uno eterno, ubíquo e imutável de Parmênides transformou-se no espírito de Platão num pensamento muito superior, o Mundo das Ideias, que apela à imaginação, embora, por necessidade, permaneça um mistério. Mas este pensamento nasceu, segundo creio, de uma experiência muito concreta -a impressão e a grande admiração e respeito que lhes despertaram as revelações do mundo dos números e das figuras geométricas- tal como aconteceu com tantos depois dele e com os pitagóricos antes. O seu espírito aceitou e absorveu profundamente a natureza destas revelações, o fato de elas se processarem por puro raciocínio lógico, que nos revela verdadeiras relações, cuja autenticidade não só não se pode refutar, mas existe obviamente para todo o sempre; essas relações eram e serão válidas, independentemente de qualquer investigação a que procedamos sobre o assunto. Uma verdade matemática é intemporal, não

Remetendo a fontes mais distantes poderíamos ainda fazer alusão aos seguintes e seminais nomes da história ocidental: Pitágoras[6], como enfatiza Russell [4],[7] com a sua ideia de números (inteiros) como entes que descrevem a realidade; Platão [5, 6] que além de ter escrito na porta de sua academia que *quem não soubesse geometria que lá não entrasse*, não se cansou de enfatizar a essencial importância da matemática em diversas instâncias de sua obra entre as quais em seu Diálogo *Leis* [8],[9],[10],[11] ; Leonardo da Vinci [7] [12],[13] que ressaltou a crucial relevância da matemática para se construir sobre fundamentos sólidos; Copérnico [8] [14], que na Introdução do Livro I de *Revoluções dos Orbes Celestes* também se refere à importância dada por Platão à matemática; Galileu [9] [15] com sua identificação da realidade física ao *livro da natureza escrito em símbolos matemáticos; assim, quem não fosse capaz de decifrar seus símbolos estaria perdido em um obscuro labirinto*.

Este, sem dúvida, constitui um problema epistemológico que enseja muitas sutilezas, algumas das quais temos a intenção de estudá-las aqui neste trabalho. Em

---

nasce quando a descobrimos. Essa descoberta, no entanto, corresponde a um fenômeno muito real, pode traduzir-se numa emoção, como se recebessemos um dom concedido por uma fada" (SCHRÖDINGER, s/d, p. 137).

[6] Pitágoras não deixou documento escrito. Tudo o que a ele é atribuído decorre das referências feitas a ele. Em que pese tal fato, ele é enormemente influente.

[7] O matemático e filósofo inglês Bertrand Russell argumenta que Pitágoras foi o pensador, talvez, o mais influente que existiu. Em uma edição italiana de sua *História da Filosofia Ocidental* podemos ler "Non so di nessun altro uomo che abbia avuto altrettanta influenza nella sfera del pensiero" (RUSSELL, 1993, p. 56). Traduzida para o português: "Não sei de pessoa alguma que na esfera do pensamento houvesse tido tamanha influência".

[8] "Ainda falta ensinar três ciências aos cidadãos livres: o estudo do cálculo e dos números; segundo, o da medida da largura, da superfície e da profundidade, vindo em terceiro lugar o que trata do curso dos astros e das relações recíprocas em sua marcha". (PLATÃO, 1980, *Leis*, Livro VII p. 238).

[9] "There still remain three studies suitable for freemen. Arithmetic is one of them; the measurement of length, surface and depth is the second; and the third has to do with the revolutions of the stars in relation to one another". (PLATÃO, 1952, *Laws*, Book VII, p. 728).

[10] "Ora , está longe de tornar-se um homem divino quem ignora o que seja um, dois e três, e os números pares e ímpares em geral; quem não sabe absolutamente calcular ou contar os dias e as noites e não tem a menor noção do curso do sol, da lua e dos demais astros. É o cúmulo da insensatez asseverar que não precisa tudo isso quem quiser adquirir noções elementares dos mais belos conhecimentos". (PLATÃO, 1980, *Leis*, Livro VII, p. 239).

[11] "And very unlike a divine man would he be, who is unable to count one, two, three, or to distinguish odd and even numbers, or is unable to count at all, or reckon night and day, and who is totally unacquainted with the revolution of the sun and moon, and the other stars" (PLATÃO, 1952, *Laws*, Book VII, p. 728).

[12] "...O studiante, studiate le matematiche, e non edificate sanza fondamenti" (DA VINCI, 1993, p. 21).

[13] " ...Estudantes, estudem as matemáticas e não edifiquem sem fundamentos" (DA VINCI; tradução para o português da citação da nota de rodapé precedente).

[14] "O grande benefício e enfeite que esta arte confere ao bem público (para não mencionar as inúmeras vantagens para os indivíduos), são muito mais excelentemente observadas por Platão. Em *Leis*, VII ele pensa que [a matemática] deverá ser cultivada em primeiro lugar, porque pela divisão do tempo em grupos de dias, como os meses e os anos, é possível manter em estado vigilante e atento os festivais e os sacrifícios. Negar a sua necessidade para o professor de qualquer ramo do ensino superior é pensamento tolo, segundo Platão". (COPÉRNICO, 1984, p. 14).

[15] "A filosofia encontra-se escrita neste grande livro que continuamente se abre perante nossos olhos (isto é, o universo), que não se pode compreender antes de entender a língua e conhecer os caracteres com os quais está escrito. Ele está escrito em língua matemática, os caracteres são triângulos, circunferências e outras figuras geométricas, sem cujos meios é impossível entender humanamente as palavras; sem eles nós vagamos perdidos dentro de um obscuro labirinto." (GALILEU, 1987, p. 21).

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

muitos casos essas relações são bem mais intuitivas, em outros são menos intuitivas e ainda em outros são tão sutis e surpreendentes que desafiam a nossa compreensão.

Por exemplo, as figuras da geometria pura em uma, duas e três dimensões apresentam uma correspondência com a realidade do mundo físico concreto nos casos, respectivamente de distâncias entre cidades, áreas de terrenos e volumes de tanques de água. No entanto, a correspondência entre o número imaginário $\mathbf{i= \sqrt{-1} =(-1)^{1/2}}$ e a realidade física não é algo que possamos dizer que seja evidente. Não obstante, o número imaginário é utilizado em tantos campos da física como na teoria eletromagnética e na mecânica quântica. Certamente, essa correspondência entre o número imaginário abstrato da matemática com a realidade concreta não é tão clara como no exemplo anterior dos comprimentos, áreas e volumes.

O nosso objetivo neste trabalho é a proposição, em forma de artigo, de uma abordagem pedagógica envolvendo elementos de matemática, física e epistemologia sobre o recorrente problema da eficácia da matemática no que concerne à realidade física. Tendo em mente este objetivo, temos a intenção de implementar uma discussão em sala de aula sobre o tema em tela no âmbito dos primeiros anos do ensino superior. Defendemos a tese de que a exploração do problema no viés interdisciplinar que aqui será apresentado constitui expediente cognitivo de grande relevância, principalmente se levarmos em conta a quase absoluta ausência de experiências educacionais do gênero que façam com que os jovens estudantes e professores reflitam sobre essas instigantes conexões da matemática com a física.

O nosso trabalho se encontra organizado da seguinte maneira: (i) na seção 2 vamos nos ater à correspondência entre o espaço abstrato da geometria pura e o espaço real concretamente existente e para tal elegemos, como caso especial de interesse, a medida do raio da terra por Eratóstenes; (ii) na seção 3, estimulados por um episódio fictício, embora verossímil, narrado por Wigner de como pode à primeira vista parecer estupefaciente a conexão entre um número da matemática pura como o $\boldsymbol{\pi}$ e a realidade estatística das tendências populacionais, encaminhamo-nos na busca dessas conexões; na seção 4, discutimos, no âmbito da própria matemática, a correspondência do número $\boldsymbol{\pi}$ com o ângulo de 180 por meio do conceito de radiano e na seção 5, no âmbito da matemática financeira, discutimos como o número **e** emerge como um limite que permite fazer conjecturas sobre as conexões da matemática pura com a realidade socioeconômica; na seção 6 mostraremos as conexões íntimas envolvendo o conceito de limite do cálculo infinitesimal (derivada e integral), o conceito de logaritmo, a função logarítmica, a função hiperbólica $y(x) = 1/x$ e o número **e**; na seção 7 esses conceitos são conectados à realidade física mediante a lei dos gases ideais que exibe para as transformações isotérmicas uma dependência do tipo hiperbólica; nas seções 8 e 9 mostramos as conexões entre os números $\boldsymbol{\pi}$ e **e** com a realidade física incluindo os conceitos de *probabilidade, fator ponderal* e *energia*; na seção 10 discutimos algumas tentativas de explicação para essa instigante conexão da matemática com a realidade física; na seção 11 apresentamos uma discussão integradora e, enfim, na seção 12 apresentaremos, a título de conclusão, e na trilha de autores como Kant, Popper, Einstein, Piaget, Smale, dentre outros, uma tentativa que vai na direção da busca de uma solução aproximativa para o problema.

Na próxima seção, e em conformidade com a organização deste trabalho, vamos analisar aspectos da correspondência entre o espaço da geometria pura com o espaço concreto no qual estão imersos a Terra e o Sol, elegendo como exemplo concreto a medida do raio da Terra por Eratóstenes (276 a. C.-194 a. C.)

2. Como Eratóstenes fez a correspondência entre geometria pura e realidade concreta?

Em primeiro lugar, Eratóstenes identifica o espaço concreto que envolve o Sol e a Terra com o espaço abstrato da geometria de Euclides. Aqui, bem entendido, estamos nos atendo a uma narrativa que é uma reconstrução racional do episódio e não a uma história do episódio propriamente dita.

Hoje em dia, esta identificação entre o espaço concreto do mundo físico com o espaço abstrato da geometria euclidiana não parece algo surpreendente, pois já há muito tempo nos acostumamos a ela. Eratóstenes, provavelmente, estava livre da influência de Aristóteles [10, 11] que dividia o mundo em duas regiões: uma abaixo da Lua e composta de quatro substâncias ou essências (terra, água, ar e fogo) e sujeita à degradação, à corrupção e à geração, e uma outra, esta acima da Lua, que era composta de uma substância etérea[16],[17],[18],[19] -a quinta essência ou éter- que não se degradava ao longo dos tempos. Evidentemente, não queremos dizer que a influência de Aristóteles seja necessariamente má em quaisquer campos que venhamos a considerar. Este ponto de vista, a nosso ver não se sustenta. De fato, Aristóteles (384 a. C. - 322 a. C.) foi um pensador seminal em muitos e muitos campos e, basta nos reportarmos à sua Lógica para constatarmos que a sua influência foi extraordinariamente relevante. No caso da sua teoria dos dois mundos qualitativamente distintos (o sublunar e o supralunar) não podemos deixar de dizer que isso de fato poderia ter se constituído em uma grande dificuldade para a identificação do espaço físico concretamente existente com o espaço da geometria de Euclides. A Escola de Alexandria, da qual Eratóstenes foi membro influente, parece não ter sido afetada por essa influência aristotélica e, deste modo, tudo indica que a teoria dos dois mundos qualitativamente distintos de Aristóteles não ter se constituído em dificuldade séria para a Escola de Alexandria [20], diferentemente do que

[16] "La substancia del Cielo constituye un quinto elemento, diverso de los que constituyen el mundo sublunar. [...]" (ARISTÓTELES, 1964, *Del Cielo*, Livro I, Título do Cap. 2, p. 713).

[17] "That in addition to the four elements, earth, water, air, and fire, there is a fifth element, the movement of which is circular." (ARISTÓTELES, 1952, *On the Heavens*, Livro I, Título do Cap. 2, p. 357).

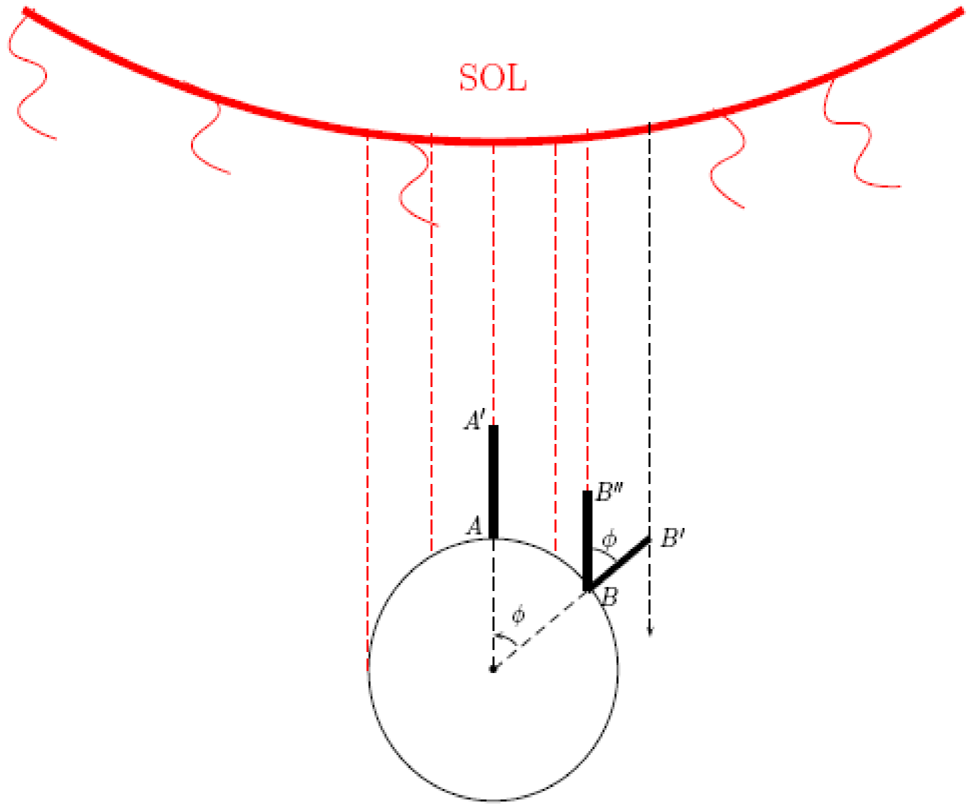
[18] "De manera que, dado que el primer cuerpo es algo distinto de la tierra y el fuego, el aire y el agua, llamaron éter al lugar supremo, tomando el nombre del mismo del "siempre correr" en un tiempo eterno" (ARISTÓTELES, 1964, *Del Cielo*, Livro I, Cap. 3, p.716).

[19] "And so, implying that the primary body is something else beyond earth, fire, air, and water, they gave the highest place a name of its own, *aither*, derived from the fact that it 'runs always' for an eternity of time" (ARISTÓTELES, *On the Heavens*, Livro I, Cap. 3. p.361-362).

[20] Isso é verdade para a escola de Alexandria, mas não é verdade para Galileu (1564-1642) que se contrapôs à considerável influência de Aristóteles em temas sobre a natureza. O historiador da ciência Alexandre Koyré argumenta que há duas características fundamentais que consubstanciam a atitude intelectual da ciência clássica: a *dissolução do Cosmos* e a *geometrização euclidiana do espaço* (ver as duas próximas notas de rodapé).

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

aconteceu com Galileu, que no parecer de Koyré [12] [21],[22] teve que envidar esforços para a afirmação e convencimento da identificação acima aludida no contexto de uma crítica a Aristóteles. Vejamos agora a seguinte narrativa sobre a identificação do espaço abstrato da geometria com o espaço concreto existente, cujo espírito é radicalmente diferente do espírito aristotélico. O Sol está no infinito, ou seja, muito longe de nós. Em um dado instante de um dia especial quando uma estaca se encontra fincada em uma cidade A em uma posição tal que é perpendicular ao solo, a estaca não exibe sombra (ver Fig. 1). Nesta situação, os raios solares provenientes do Sol incidem na Terra paralelamente à estaca. Por isso, a



<u>FIG. 1</u>: A estaca AA' está disposta perpendicularmente ao solo. O Sol está situado no infinito, ou seja, muito longe. Em um dia especial e num momento especial deste dia, os raios solares incidem paralelamente à estaca AA'. Nessas condições, a estaca AA' não exibe sombra. Neste mesmo dia e neste mesmo momento, uma estaca BB' é colocada na cidade B, em uma posição perpendicular ao solo. A estaca BB' exibe sombra pois os raios solares formam um ângulo ϕ com BB'. Para que a

[21] "Aussi croyons-nous, que l'attitude intellectuelle de la science classique pourrait être caractérisée par ces deux moments, ètroitement liés d'ailleurs: gèometrization de l'espace, et dissolution du Cosmos, c'est-à-dire disparition, à l'intérieur du raisonnement scientifique, de toute considération à partir du Cosmos; substitution à l'espace concret de la physique prégaliléenne de l'espace abstrait de la géométrie euclidienne. C'est cette substitution qui permet l'invention de la loi d'inertie" (KOYRÉ, 1966, p. 15).

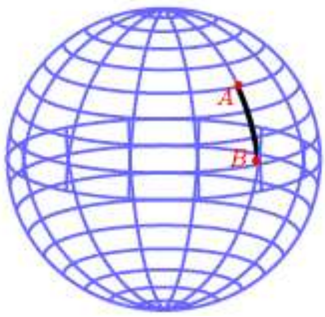
[22] "Assim, nós acreditamos que a atitude intelectual da ciência clássica poderia ser caracterizada por esses dois momentos estreitamente ligados entre si: geometrização do espaço, e dissolução do Cosmos, isto é, o desaparecimento, no interior do raciocínio científico, de toda a consideração a partir do Cosmos; substituição do espaço concreto de física anterior a Galileu do espaço abstrato da geometria euclidiana. É esta substituição que permite a invenção da lei de inércia" (KOYRÉ, tradução para o português da nota de rodapé precedente).

sombra da estaca seja removida na cidade B é necessário rodar a estaca de um ângulo ϕ até atingir a posição BB''. AA' é paralela a BB''. Pela geometria de Euclides é fácil notar que os prolongamentos das estacas AA' e BB' a partir de suas respectivas posições perpendiculares ao solo formam no centro da Terra, suposta esférica, o mesmo ângulo ϕ. A figura acima é meramente ilustrativa e está, obviamente, fora de escala.

sombra da estaca não é exibida. Um pressuposto, que se encontra subjacente a todo este raciocínio, é que a luz proveniente do Sol se propaga em linha reta.

Numa cidade B, distante de A, e situada ao longo de um mesmo meridiano que A, uma estaca fincada em uma posição perpendicular ao solo em B, e para este mesmo instante desse dia especial, exibe sombra. Ora, nesta situação os raios solares provenientes do Sol incidem na estaca que se encontra na cidade B perpendicularmente ao solo segundo um ângulo ϕ. Se prolongarmos até o centro da Terra as linhas das estacas a partir de suas respectivas posições perpendiculares ao solo em A e em B, então elas se encontrarão em um ponto O, chamado de centro da Terra. A Terra aqui é pressuposta esférica. As linhas AO e BO formam um ângulo exatamente igual a ϕ.

Uma vez conhecida a distância entre as cidades A e B, cidades essas que como vimos se encontram situadas ao longo de um mesmo meridiano (ver Fig. 2), e deste modo subentendem um arco de circunferência AB, então podemos associá-la ao ângulo ϕ. Um raciocínio de proporcionalidade direta, consubstanciado pelo uso de uma regra de três simples nos permite estabelecer que o arco de circunferência AB está para o ângulo ϕ, medido em graus, assim como o comprimento completo da circunferência $2\pi R$ está para o ângulo de 360 graus.



<u>FIG. 2</u>: É importante que as cidades A e B estejam situadas ao longo de um mesmo meridiano. Como sabemos, o meridiano é uma circunferência máxima passando de polo a polo. Isso garante que a inclinação entre as trajetórias dos raios solares e as estacas dispostas perpendicularmente ao longo do arco de circunferência AB, sofra uma variação contínua.

A distância AB é uma quantidade conhecida e vale aproximadamente 800 quilômetros. O ângulo ϕ pode ser facilmente medido pois constitui-se no ângulo que se precisa mover a estaca de sua posição originalmente perpendicular ao solo em B para a qual exibe sombra, para uma posição tal a não mais exibir sombra. Em outras palavras,

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

a estaca BB' que se encontra na posição perpendicular ao solo em B e portanto exibe sombra, deve ser girada para a posição BB", que não é mais perpendicular ao solo em B, mas é paralela a AA' que se constitui na estaca na posição perpendicular ao solo em A. Este ângulo de giro é exatamente o ângulo ϕ. O valor de ϕ é aproximadamente 7,2 graus. Por outro lado, a quantidade $\boldsymbol{\pi}$ que representa a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro, vale aproximadamente 3,14... para qualquer que seja a circunferência.

Todas as quantidades conhecidas nos permitem explicitar o valor de R, ou seja, o Raio da Terra.

Obtemos portanto,

$$R \approx 6370 \text{ km}$$

Sem dúvida, o feito de Eratóstenes foi extraordinário e por o estudarmos com um certo distanciamento histórico ele parece ser menor do que realmente foi. No entanto, se fizermos um esforço e nos colocarmos, dentro de nossas limitações de abstração, na época de Eratóstenes, então veremos que de fato esta constituiu-se em uma realização grandiosa, luminosa e estupenda do espírito humano.

3. O que o número π tem a ver com tendências populacionais e com situações estatísticas?

Wigner [2] no famoso artigo já aludido aqui, contou um caso em que dois antigos colegas haviam se encontrado e um deles perguntou ao outro qual a profissão que houvera abraçado. O amigo respondeu que se tornara estatístico e que trabalhava agora no campo das tendências populacionais. O amigo ficou curioso e mostrou alguns papéis e nesses apareciam o número $\boldsymbol{\pi}$. O outro perguntou o que é este símbolo ao que o amigo retrucou: trata-se do número $\boldsymbol{\pi}$. Ele então, surpreso, quis saber do que significava; ora, você não sabe? Trata-se da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro !

O amigo então cheio de dúvidas perguntou ainda mais surpreso*: Ora bolas, o que a circunferência tem a ver com a população?*

Este é o problema epistemológico que tanto tocou pessoas como Wigner e Einstein e dele nos ocuparemos tentando analisar alguns de seus aspectos.

Trata-se de um problema de alguma maneira sutil pois diz respeito a como o número $\boldsymbol{\pi}$ que é algo, em princípio, restrito a uma relação geométrica pura como a que expressa a razão entre dois comprimentos, tenha uma contrapartida no mundo concreto das quantidades estatísticas como aquelas que dizem respeito a propriedades das populações.

Procederemos por partes. Em primeiro lugar, trabalharemos com uma correspondência no âmbito da própria matemática como aquela que diz respeito à atribuição de um ângulo dado a quantidades proporcionais a $\boldsymbol{\pi}$. Em seguida,

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

procuraremos entender outros níveis de correspondência. Passemos na próxima seção ao primeiro nível de correspondência, ou seja, como um ângulo dado pode ser expresso como um numero proporcional ao número **π**.

4. Correspondência entre um dado ângulo e múltiplos do número π

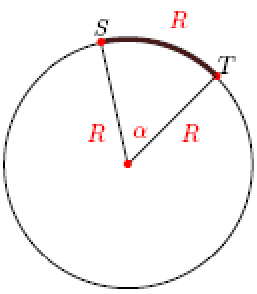
Tomemos uma circunferência de raio igual a **R**. Sabemos que o comprimento desta circunferência é **2πR.** Definamos para cada comprimento de arco de valor **R** desta circunferência um ângulo tal subentendido pelas linhas traçadas das extremidades deste arco de circunferência em questão ao centro da circunferência (ver Fig. 3). A este ângulo chamamos de radiano. É evidente que a circunferência completa estará associada a um ângulo de 2**π** radianos. Daí a correspondência entre:

$$360 \text{ graus} \rightarrow 2\pi \text{ radianos}$$

$$180 \text{ graus} \rightarrow \pi \text{ radianos}$$

$$90 \text{ graus} \rightarrow (\pi/2) \text{ radianos}$$

$$45 \text{ graus} \rightarrow (\pi/4) \text{ radianos}$$



<u>FIG. 3</u>: O arco de circunferência ST tem comprimento igual ao raio R. O ângulo α correspondente, tal como o mostrado acima, é chamado de radiano. Como o comprimento da circunferência é 2πR, então há 2π radianos cobrindo o ângulo total de 360 graus.

E ai a correspondência entre um dado ângulo e o número **π** se faz com relativa simplicidade. Trata-se aqui, a bem da verdade, de uma correspondência entre um conceito de matemática (o conceito de ângulo) com outro conceito da matemática (o conceito de número **π**) , ou seja, trata-se de uma correspondência no interior da própria matemática. Passemos para outro nível de correspondência: a do número **e** com a realidade financeira.

5. Como o número *e* emerge da matemática financeira? Como classificaríamos este tipo de correspondência?

Tomemos o seguinte problema: suponhamos que alguém empreste uma dada soma financeira a alguém, ou seja, um capital $\mathbf{C_0}$ a uma taxa de juros **b%** ao ano o qual pode ser retirado em qualquer fração **f** do período anual. Os juros cobrados serão então proporcionais ao capital aplicado, à taxa anual da aplicação financeira e à fração de tempo anual que o investidor deixou o capital aplicado.

Com relação aos juros, a fórmula matemática que expressa tudo isso é a seguinte:

$$\mathbf{J = f\,(b/100)\,C_0} \quad (1)$$

Vejamos alguns casos:

Suponhamos que o empréstimo se dê a uma taxa de 100% ao ano e que o capital seja deixado em aplicação durante o período de um ano. Neste caso, **f=1** e **b=100**. Assim, transcorrido todo o período anual de aplicação, o investidor tem direito a juros de:

$$J= (1)\,(100/100)\,C_0 = C_0 \quad (2)$$

Se no término de um ano inteiro de aplicação o investidor retirar o seu capital investido acrescido dos juros correspondentes ao período de aplicação, então ele pode retirar a quantia financeira de:

$$C_1 = C_0 + J = C_0 + C_0 = 2C_0 \quad (3)$$

A fórmula acima poderá ser convenientemente reescrita como

$$\mathbf{C_1 = (1 + 1/1)^1\,C_0}$$

Como se vê o investimento ao cabo de um ano virou o dobro daquele originalmente investido.

Em seguida, o investidor vai notar que se ele investir durante uma dada fração do ano, retirar ao cabo dessa fração anual o montante investido já com os juros acrescidos correspondentes ao período de aplicação, e depois reinvestir o montante resultante durante a mesma fração do ano e numa mesma taxa de juros, então ao término de um ano completo a sua vantagem será maior do que se ele deixasse, como no exemplo analisado, o capital aplicado sem mexer durante todo o ano. Este será o segundo caso que analisaremos.

Suponhamos que o período de aplicação seja de 6 meses, o que equivale a uma fração de ano correspondente a (1/2) ano, e que a taxa de juros continue sendo de 100% ao ano. Neste caso, o investidor fará as seguintes aplicações financeiras: a primeira no início do ano a partir do capital inicial $\mathbf{C_0}$ e depois, decorridos 6 meses (1/2 ano) retirando todo o montante obtido até então, inclusive os juros correspondentes ao período, e novamente reinvestindo tudo por um período de mais 6 meses (1/2 ano) conforme a taxa de juros de 100% ao ano. Assim procedendo, ele obterá um capital final $\mathbf{C_2}$ ao cabo de um ano de

$$\mathbf{C_2 = (\,1 + 1/2)^2\,C_0}$$

Se o investidor proceder de maneira análoga com sucessivos investimentos, retiradas totais e novos reinvestimentos de 4 em 4 meses (1/3 ano), ele obterá um capital final $\mathbf{C_3}$ ao cabo de um ano de aplicações a juros de 100% ao ano,

$$\mathbf{C_3 = (1 + 1/3)^3 C_0}$$

Se o investidor proceder de maneira inteiramente análoga com sucessivos reinvestimentos e retiradas em uma periodicidade mensal (1/12 ano) ele obterá ao cabo de um ano de aplicações a juros de 100% ao ano, ele obterá o capital $\mathbf{C_{12}}$,

$$\mathbf{C_{12} = (1 + 1/12)^{12} C_0}$$

Para uma periodicidade de (1/n) do ano ele obterá nas mesmíssimas condições,

$$\mathbf{C_n = (1 + 1/n)^n C_0}$$

Imaginemos agora aplicações instantâneas por cada período infinitesimal mantidas as mesmíssimas condições de juros a 100% ao ano. Aí teremos uma situação limite que é expressa por:

$$\text{Lim} \{C_n\}_{n\to\infty} = C_0 \text{Lim}_{n\to\infty} \{(1 + 1/n)^n\} \qquad (4)$$

O limite de $(1 + 1/n)^n$ quando o valor de **n** tende para o infinito é o número **e** cujo valor até uma certa casa decimal é:

$$\mathbf{e = 2,\ 7182818284....}$$

Ele pode ser interpretado neste contexto como o fator multiplicativo limite que um investidor pode aumentar o seu capital inicial quando o investe ao longo de um dado tempo total finito T à taxa de juros de 100% ao tempo T prefixado (ou seja, ao ano, ao século, ao milênio etc.) e segundo períodos sucessivos de reinvestimentos tais que tendam para o infinito, ou seja, segundo aplicações instantâneas.

Que tipo de correspondência é esta?

Claro está que não se trata da realidade física, entendida a física como ciência da natureza na tradição de Galileu, Newton, Maxwell, Planck, Einstein etc. O âmbito é muito mais a de uma matemática a qual podemos chamar, com alguma liberdade de expressão, de matemática aplicada, embora, em larga medida, se esquecermos momentaneamente a correspondência com a realidade financeira, ela seja também matemática pura. Aqui se trata de matemática financeira que foi inventada pelos matemáticos habilidosos e logo aproveitada por banqueiros, que independentemente de serem matemáticos, tinham em vista certos interesses. Tanto é que os juros também são chamados de *interesses bancários*. Trata-se, a bem da verdade, de uma realidade a qual podemos chamar de econômico-social dado que o lucro é uma categoria em que as sociedades que lidam com riquezas e rendas tiveram necessidade de inventar por diversas razões que transcendem o mero âmbito interno da ciência e, portanto, requerem uma abordagem também de caráter externalista que também é bastante interessante. Há contudo, sociedades que não se inserem propriamente neste contexto pois são sociedades de economia de subsistência. Vivem, como se diz no popular, *da mão para a boca*, isto é, vivem do que caçam, pescam, plantam e colhem e assim não se preocupam

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

tanto com a acumulação de riquezas. Esta situação esta ficando cada vez mais rara no mundo, porém ainda existe.

No foco do presente trabalho contudo, o mais importante é afirmar que o número **e** da matemática pura encontra correspondência com a realidade dos interesses bancários (os juros) e que estes últimos pertencem a uma realidade econômico-social e em larga medida também política, pois envolve poderes constituídos em uma dada sociedade.

Não se trata ainda de uma correspondência com a realidade da natureza e das ciências naturais. No entanto, se nos reportarmos ao problema colocado por Wigner, veremos, de certo modo estupefatos, que o número **e** pertencente à matemática pura, inventada pelos matemáticos, encontra contrapartida na realidade das economias das sociedades. E esta já é uma pista para aprofundar os nossos questionamentos.

Poder-se-ia pensar que o número **e** que expressa o ganho máximo que um capital inicial $\mathbf{C_0}$ investido a juros de 100% ao ano e segundo aplicações e reaplicações instantâneas, estivesse relacionado com a usura humana, ou seja, com a propriedade intrínseca das pessoas de quererem sempre mais e mais para si próprias ainda que em detrimento dos demais. Argumentamos que uma interpretação do gênero não se sustenta. Vejamos porque.

Ora, se for investido um capital inicial $\mathbf{C_0}$ segundo as condições acima referidas, teremos ao longo de um ano inteiro um montante de $\mathbf{C_0\ e}$. Se reinvestirmos o montante $\mathbf{C_0\ e}$ exatamente nas mesmas condições anteriores, teremos ao cabo de 2 anos o montante $\mathbf{C_0\ e^2}$ e assim sucessivamente, ao longo de um século teremos o extraordinário montante de $\mathbf{C_0\ e^{100}}$. Poder-se-ia precipitada e erroneamente atribuir que **e** suas potências $\mathbf{\{e^2,\ e^3,\ ......e^{50},\ ....e^{100}.......\}}$ fossem as expressões matemáticas da usura humana. Mas isso não se sustenta pela simples e singela razão seguinte: Poderíamos fazer um cálculo inteiramente análogo de um investimento a partir de um capital inicial $\mathbf{C_0}$ com aplicações e reaplicações instantâneas com uma taxa de juros a 100% **ao século**, ao invés de 100% ao ano. Neste caso, decorrido um século inteiro de aplicações e reaplicações instantâneas a pessoa resgataria apenas um montante de $\mathbf{C_0\ e}$, ou seja, uma soma aproximadamente 2,7 vezes maior daquela que houvera investido há um século. Esta pessoa, além de debilitada pela idade, estaria também pesadamente empobrecida, pois a inflação ao longo de um século seria, com toda a probabilidade, bastante superior 2, 7 vezes, e certamente isso seria um péssimo negócio. Logo, não é o número **e** que se constitui na causa e na expressão de qualquer usura. *Uma causa e uma expressão da usura humana estariam muito mais apropriadamente imputadas às altíssimas taxas de juros ao longo de um tempo prefixado que fosse brevíssimo e não às altíssimas taxas de juros em prazos prefixados muitíssimo longos. Deste modo, na nossa opinião, o número* ***e*** *não pode ser usado para expressar qualidades morais dos seres humanos, pelo menos neste contexto.*

Vamos continuar a nossa pesquisa com o fito de estabelecer as conexões íntimas entre o número **e**, o conceito de limite do cálculo infinitesimal (incluindo, derivada e integral), a função logarítmica e a função hiperbólica. A partir do estabelecimento dessas conexões íntimas construímos um ponto de encontro com a realidade física .

6. Conectando o número *e* com as funções logarítmica e hiperbólica

Como sabemos, a derivada de uma função y (x) em um dado ponto é o limite da razão incremental $\{[y(x+\Delta x) - y(x)]/\Delta x\}$ quando Δx tende para zero. Apliquemos esta definição à função logarítmica $y(x) = \log_a(x)$ tendo em vista a definição de logaritmo de um número numa dada base **a** como o expoente a que temos de elevar a base **a** para obter o número. Isto feito, obtemos,

$$y'(x) = \mathrm{Lim}_{\Delta x \to 0}\{(\Delta y/\Delta x)\} = \mathrm{Lim}_{\alpha \to 0}(1/x)\{\log_a(1+\alpha)^{1/\alpha}\} = (1/x)\log_a \mathbf{e}$$

$$\text{onde, } (\Delta x/x) = \alpha$$

A expressão $\{\log_a \mathbf{e}\}$ significa, tal como sabemos, o logaritmo de um número que elevado à base **a** nos fornece o número **e**. Ora, tendo em vista que o logaritmo de um dado número numa dada base é o expoente que se precisa elevar à base considerada para obter o número, então segue que se **a = e**, então obteremos $\mathbf{e^1 = e}$. *Por conseguinte a quantidade* $\{\log_a \mathbf{e}\}$ *é igual a 1 se escolhermos como base do sistema de logaritmos o número* ***e****.*

Vemos portanto que $y' = (dy/dx) = (\ln x)' = 1/x$, ou seja, a derivada do logaritmo de x, considerando a base **e** é a função hiperbólica (1/x).

Deste modo, conectamos os conceitos de logaritmo, de função logarítmica e de função hiperbólica y(x)=1/x com o número ***e.*** *Este resultado é simplesmente maravilhoso e nos permite vislumbrar pistas concretas sobre a conexão entre a matemática e a realidade física.* Quando integramos a função hiperbólica, encontraremos novamente a função logarítmica.

Ao explorar um fenômeno físico que exiba uma dependência funcional do tipo hiperbólico y(x)=1/x encontramos também um elo no qual a quantidade **e** revela-se como um número a desempenhar papel de imprescindível importância na conexão entre a matemática e a realidade física.

7. A atmosfera isotérmica

A fim de fixar as ideias, relembremos que o nosso objetivo aqui neste trabalho é o de tentar abordar alguns aspectos, ainda que a resposta seja parcial, muito particular e delimitada, sobre como a matemática pura e a realidade física se relacionam. Vejamos um problema de física no qual aparecerá uma relação funcional do tipo mais simples de hipérbole que como vimos é y(x) =1/x. Isto já é uma pista pois, como vimos, a função hiperbólica se conecta claramente tanto com o número **e**, quanto com o conceito de logaritmo. Suponhamos que a atmosfera além de isotérmica seja bem descrita pela lei dos gases perfeitos

$$\mathbf{PV = NKT} \qquad (5)$$

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

Na expressão (5), **P** denota a pressão do gás, **N** o número de moléculas contidas em um dado volume **V** do gás, **K** denota a constante de Boltzmann, quantidade fundamental em toda a termodinâmica e em toda a mecânica estatística, e **T** denota a temperatura absoluta do gás.

A expressão (5) pode ser escrita da maneira a seguir

$$\mathbf{P = (N/V)\ KT = nKT} \qquad (6)$$

Reparemos que em (6) a quantidade **n= (N/V)** denota a densidade do gás. Como ambas as quantidades respectivamente **K** e **T** são constantes, esta última na medida em que estamos considerando um processo isotérmico, então podemos escrever em linguagem diferencial:

$$\mathbf{dP = KT\ dn} \qquad (7)$$

Isso mostra que no problema aqui considerado uma variação infinitesimal de pressão está conectada com uma variação infinitesimal da densidade do gás. Ademais, para um acréscimo infinitesimal da densidade **n** corresponde um acréscimo infinitesimal da pressão **P**.

Por outro lado, dado que a pressão é a razão entre força newtoniana **F** e a área **S** sobre a qual esteja exercida essa força, e ademais sabendo que esta força diz respeito ao peso **Nmg** das moléculas do gás e que o volume é o produto da área pela altura, então

$$\mathbf{dP = (N/V)\ mg\ (-dh)} \qquad (8)$$

O sinal negativo que aparece em **(-dh)** na expressão (8) decorre do fato físico segundo o qual para um acréscimo infinitesimal da altura **h** corresponde um decréscimo infinitesimal da pressão **P.**

Tendo em vista que **(N/V) = n**, então a expressão (8) pode ser escrita como:

$$\mathbf{dP = n\ mg\ (-dh)} \qquad (9)$$

Igualando (7) a (9), então podemos escrever:

$$\mathbf{KT\ dn = n\ mg\ (-dh)} \qquad (10)$$

Reparemos que esta é a equação diferencial

$$\mathbf{(dn/n) = -\ (mg/KT)\ dh} \qquad (11)$$

Se integrarmos a equação diferencial acima nos limites $\mathbf{n=n_0}$ até **n= n** e nos limites $\mathbf{h_0 = 0}$ até **h= h**, obteremos

$$\mathbf{\ln(n/n_0) = -\ (mg/KT)\ h} \qquad (12)$$

Aplicando a definição de logaritmo

$$(\mathbf{n/n_0}) = \mathbf{e}^{-\mathbf{mgh/KT}}$$

ou,

$$\mathbf{n(h) = n_0\, e^{-mgh/KT}} \qquad (13)$$

Vemos que neste problema físico concreto ora analisado aparece uma relação entre a pressão **P** e o volume **V** do gás em uma forma hiperbólica do tipo **P ~ (1/V)** e na qual aparece naturalmente o número **e**. *Vemos que não é somente no contexto da realidade econômico-social das práticas financeiras que aparece este monumental número. Ele também aparece, com toda a sua pujança, em um problema que se refere à realidade física como o da atmosfera suposta isotérmica e obedecendo à lei dos gases ideais.*

8. Interpretação em termos de probabilidades

Vejamos a fórmula (13) e nos atenhamos a ela. Reparemos que para a altura **h=0**, a densidade do gás $\mathbf{n(h) = n_0}$, será máxima. Isso mostra que a quantidade $\mathbf{n(h)/n_0}$ pode ser interpretada como a probabilidade $\mathbf{e^{-mgh/KT}}$ de encontrar moléculas em um dado arranjo espacial. A quantidade $\mathbf{n(h)/n_0}$ também pode ser interpretada como a razão entre o universo de possibilidades favoráveis de encontrar moléculas em um arranjo espacial de uma dada densidade **n(h)** com **h>0** e todo o universo de possibilidades que retunda em um arranjo espacial de densidade máxima $\mathbf{n_0}$. Este raciocínio nos leva à conclusão segundo a qual *esta razão expressa um fator ponderal, ou seja, expressa uma probabilidade*. Trata-se do *fator ponderal* de Boltzmann $\mathbf{e^{-mgh/KT}}$.

Voltando ao episódio narrado por Wigner, independentemente de ser uma narrativa real ou fictícia, diremos que o que importa é que essa narrativa seja inteiramente verossímil e que nos enseje a pensar sobre o assunto e isso, certamente, ela faz. *Deste modo, podemos conectar o número **e** não somente com a realidade socioeconômica da matemática financeira, como também com os logaritmos, com as hipérboles, com a realidade física de uma atmosfera isotérmica supostamente descrita pela equação dos gases ideais e também com o conceito de probabilidade*.

No entanto, no episódio de Wigner o espanto daquele antigo colega não era em relação ao número ***e*** e sim em relação ao número **π** e de sua à primeira vista estranha relação com a estatística. Lembremos que na seção 4, mostramos uma correspondência dentro da própria matemática que nos permite associar um dado ângulo ao número **π**. Mas isso não basta para os nossos propósitos aqui; para saciar a nossa curiosidade cognitiva, é necessário ir além. A fim de que nos aproximemos de uma resposta a ser dada ao personagem espantado do artigo de Wigner, vamos tentar responder sobre as conexões entre o número **π** e a realidade física na próxima seção.

9. Como fazer a correspondência entre o número π e a realidade física?

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

Qualquer estudante sabe que para calcular a sua média, denotada aqui por **<média>**, para saber se logrou aprovação em um determinado curso, ele terá que lançar mão da fórmula da média ponderada que é dada por

$$< \textbf{média} > = (\Sigma_{(i)}\ n_i\, p_i) / (\Sigma_{(i)}\ p_i)$$

Na fórmula acima, cada $\mathbf{n_i}$ corresponde a i-ésima nota e $\mathbf{p_i}$ é o seu peso correspondente. A média será portanto o somatório de todos os produtos ($\mathbf{n_i p_i}$) e o valor deste somatório será dividido pela soma de todos os pesos $\mathbf{p_i}$ correspondentes. Na maioria dos casos, o denominador é normalizado a **10** e a média resultante será a de algum número compreendido entre valores maiores ou iguais a zero e menores ou iguais a dez. Se os pesos forem todos iguais, então a média ponderada se transforma em média aritmética.

No caso da expressão (13), a quantidade **mgh** corresponde à energia potencial de uma molécula de massa **m** em um planeta no qual os corpos caem em queda livre de uma altura **h** com uma aceleração constante **g**. Este resultado, pode ser generalizado para uma dada massa **m** não necessariamente correspondente a uma molécula. Isso nos permite escrever

$$\textbf{(Probabilidade =Fator Ponderal)} = e^{-mgh/KT} = e^{-(\text{Energia Potencial}/KT)}$$

A lei de Boltzmann vale para um caso geral, e assim podemos escrever,

$$\textbf{(Probabilidade =Fator Ponderal)} = e^{-(\text{Energia Total}/KT)}$$

Encontramos também uma conexão importante entre o número ***e*** e o importantíssimo *conceito de energia em física*.

Para o caso de um gás ideal não sujeito a uma ação externa, e por isso não consideremos aqui a gravidade como no caso analisado da atmosfera isotérmica, teremos então um problema que somente envolve a energia de movimento, ou seja, a energia cinética das moléculas constituintes do gás. Neste caso, podemos escrever a probabilidade, ou o fator ponderal, como:

$$\textbf{(Probabilidade =Fator Ponderal)} = e^{-(\text{Energia Cinética}/KT)}$$

A energia cinética de uma dada molécula é ($\mathbf{mv^2/2}$) e as muitas moléculas que compõem o gás terão velocidades que cobrem um espectro de valores que pode ser considerado como percorrendo um contínuo que em princípio vai de menos infinito a mais infinito. Logo, obtemos uma integral do tipo

$$I_{indefinida} = \int \exp(-\beta v^2)\, dv$$

Onde,

$$\exp(R) \equiv e^{(R)}$$

Uma vez calculada esta integral entre os limites de $-\infty$ a $+\infty$, obtemos o resultado,

$$\mathbf{I= (\pi/\beta)^{1/2}}$$

Vemos que o número $\boldsymbol{\pi}$ *se conecta com um problema de natureza estatística relacionado como médias sobre os valores possíveis de velocidades assumidas pelas moléculas de um gás ideal. E isto é simplesmente maravilhoso.*

Encontramos então um nexo entre possíveis problemas estatísticos aplicáveis a questões relacionadas a tendências populacionais com o número $\boldsymbol{\pi}$ que expressa a razão entre o comprimento da circunferência com o seu diâmetro.

Talvez o amigo estupefato do relato de Wigner acerca do episódio, fictício ou real, não importa, dos dois ex-colegas que se encontram depois de tanto tempo, pudesse então se conformar com o devido espanto com a conexão de coisas, à primeira vista tão díspares como: por um lado, um número que emerge de uma relação matemática pura conectando a razão entre dois comprimentos, e, por outro lado, a realidade física da estatística das moléculas em um gás ideal bem como ainda da estatística aplicada às tendências populacionais.

10. Como podemos explicar esta maravilhosa adaptação da matemática à realidade física?

Há várias tentativas de explicação. Dorato [13], em interessante artigo, tentou classificar as explicações dadas sobre a maravilhosa adaptação da matemática à realidade física em dois pares de teorias mutuamente opostas.

No primeiro par estariam as explicações do tipo *ignorabimus* versus aquelas de caráter *deflacionário*. Inscrever-se-iam como explicações do tipo *ignorabimus* aquelas dadas por Wigner ao atribuir esta adaptação a um dom maravilhoso que nos foi dado e do qual não entendemos e nem merecemos. A tirar pela citação de Schrödinger, talvez ele de alguma maneira tendesse para este tipo de explicação. Por outro lado, as explicações *deflacionárias* apenas apontariam que se trata de um falso problema pois devido a um efeito seletivo escolhemos deliberadamente no mundo concreto exatamente aquilo que se adaptasse e funcionasse matematicamente e desprezaríamos tudo o que eventualmente não se adaptasse e não funcionasse. Poderíamos dizer, em termos mais diretos, que esta seria uma explicação do tipo *carta marcada* pois somente consideraríamos como adaptação à matemática aquilo que de antemão já sabíamos que tem caráter matemático, desconsiderando todo o resto que manifestamente não tivesse caráter matemático.

Um segundo par de explicações antitéticas seria circunscrito àquelas de caráter *antinaturalistas* ou *sobrenaturais* por um lado, e àquelas de caráter *naturalistas*, por outro. As *antinaturalistas*, que em certo sentido poderíamos também denotar por *sobrenaturais*, são por exemplo as que atribuem a uma lei imposta pelo Criador como, por exemplo, a conservação da quantidade de movimento total cartesiana enquanto expressão da perfeição, da imutabilidade e da constância divinas. As explicações *naturalistas* [23]seriam tais que não conceberiam o problema "nem como um mistério insondável nem tampouco como um efeito colateral trivial de uma amostra tendenciosa de casos históricos para os quais a matemática se adaptaria à realidade". Deste modo, Dorato alude que "pode-se defender uma explicação evolutiva e cognitiva para a origem da nossa capacidade matemática, como uma forma de adaptação a uma realidade que é, no entanto, passível de aplicação da matemática."

Um terceiro tipo de explicações que French [14, 15] denotou como circunscritas a um *isomorfismo parcial* parecem ser as que melhor aproximam as estruturas de nossa mente, por um lado, com as estruturas do mundo, por outro.

Neste estágio de nossa exposição é interessante remeter a discussão a autores como Einstein [16] [24], Kant [17] [25] e Popper [18] [26]. Em interessantíssimo prefácio (foreword) ao livro *Concepts of Space* de Max Jammer, Einstein argumentou que existem dois grandes tipos de conceitos de espaço, ambos igualmente legítimos: (i) no primeiro grupo, o espaço teria primazia em relação aos objetos materiais nele inseridos de tal maneira que estes somente seriam concebíveis enquanto existentes no espaço,

[23] "On the other hand, a naturalistic, non-supernatural type of explanation is the one advocated here, one that, therefore, does not treat our problem neither as an irresolvable mystery nor like a trivial side effect of a biased sample of historical cases. One could defend an *evolutionary* and *cognitive* explanation for the origin of our mathematical ability, as a form of adaptation to a reality that is, however, amenable to the application of mathematics". (DORATO, 2010, p. 68)

[24] "These two concepts of space may be contrasted as follows: (a) space as positional quality of the world of material objects; (b) space as container of all material objects. In case (a), space without a material object is inconceivable. In case (b), a material object can only be conceived as existing in space; space then appears as a reality which in a certain sense is superior to the material world. Both space concepts are free creations of the human imagination, means devised for easier comprehension of our sense experience" (EINSTEIN, foreword to Jammer, 1954)

[25] "... Até agora se supôs que todo nosso conhecimento tinha que se regular pelos objetos; porém, todas as tentativas de mediante conceitos estabelecer algo a priori sobre os mesmos, através do que o nosso conhecimento seria ampliado, fracassaram sob essa pressuposição. Por isso tente-se ver uma vez se não progredimos melhor nas tarefas da Metafísica admitindo que os objetos têm que se regular pelo nosso conhecimento, o que assim já concorda melhor com a requerida possibilidade de um conhecimento a priori dos mesmos que deve estabelecer algo sobre os objetos antes de nos serem dados. O mesmo aconteceu com os primeiros pensamentos de Copérnico que, depois das coisas não quererem andar muito bem com a explicação dos movimentos celestes admitindo-se que todo o exército de astros girava em torno do espectador, tentou ver se não seria mais bem-sucedido se deixasse o expectador mover-se e, em contrapartida, os astros em repouso. Na Metafísica pode-se então / tentar algo similar no que diz respeito à intuição dos objetos. Se a intuição tivesse que se regular pela natureza dos objetos, não vejo como se poderia saber algo a priori a respeito da última; se porém o objeto (Gegenstand) (como objeto (Object) dos sentidos) se regula pela natureza de nossa faculdade de intuição, posso então representar-me muito bem essa possibilidade" (KANT, Prefácio à 2ª ed. da Crítica da Razão Pura).

[26] "In order to develop more fully what I have just said only very roughly, it is useful to introduce here a variant of the Kantian terminology of *a priori* and *a posteriori*. In Kant knowledge a priori means knowledge that we posses prior to sense-observation; and knowledge *a posteriori* means knowledge we posses *posterior* to sense-observation, or after observation; and I will use the terms 'a priori' and 'a posteriori' only in this temporal or historical sense. (Kant himself uses his term a priori to mean, in addition, knowledge that is not merely prior observation but also '*a priori* valid'; by which he means necessarily or certainly true. Of course, I shall not follow him in this since I am stressing the uncertain and conjectural character of our knowledge.) So I shall use the term '*a priori'* to characterize that kind of knowledge -of fallible or conjectural knowledge- which an organism has *prior to sense experience*; roughly speaking, it is *inborn* knowledge. And I shall use the term '*a posterior'* for knowledge that is obtained with the help of the sensitivity of the organism to momentary changes in the state of its environment". (POPPER, 1990, p. 45-46).

mas o espaço permaneceria inteiramente concebível independentemente dos objetos materiais, daí a sua primazia em relação a estes; (ii) no segundo grupo estaria um espaço que seria indissoluvelmente conectado aos objetos materiais e caso os últimos fossem retirados, esse espaço desapareceria juntamente com tais objetos, e neste caso o espaço não mais teria qualquer primazia em relação aos objetos materiais.

No primeiro grupo estaria o espaço receptáculo, que se adapta à mecânica e à teoria da gravitação universal de Newton, por exemplo, e no segundo grupo estaria o espaço da teoria da gravitação de Einstein ou teoria geral da relatividade. Como, segundo Einstein, ambos os tipos de espaço são escolhas arbitrárias e igualmente legítimas para a descrição do mundo, então não haveria propriamente uma correspondência ontológica exata entre algum de quaisquer desses dois tipos de espaço com a realidade.

Uma outra maneira, de algum modo relacionado de se ver isso, é a constatação de que não há uma correspondência ontológica exata entre o espaço da geometria de Euclides e o espaço da realidade concreta, mesmo porque as geometrias nãoeuclidianas também dão conta de diversos aspectos do real.

De alguma maneira, as ideias que subjazem a isto parecem ter sido antecipadas por Kant por ocasião de sua famosa *Revolução Copernicana à la Kant* segundo a qual necessariamente devemos impor nossos *a priori* ao mundo para contorná-lo mediante as nossas teorias. Popper interveio com uma resalva importantíssima feita à *Revolução Copernicana à la Kant* ao asseverar que nem mesmo aqueles *a priori* que temos necessariamente que impor ao mundo para contorná-lo e dai obtermos algum sucesso são, apenas por isso, necessariamente verdadeiros: eles continuam a ser eternamente conjecturais.

Para dar um exemplo de uma discussão sobre possíveis conexões entre estruturas cognitivas engendradas pelo sujeito cognoscente e as propriedades do mundo exterior, vejamos uma resposta bastante interessante dada por Jean Piaget [19, 20] [27],[28] ao matemático Thom sobre como essa identificação se dá, segundo o seu parecer, ao nível da psicogênese. Piaget argumenta em prol de uma conexão entre, por um lado, o espaço físico exterior e, por outro, uma construção do sujeito. Piaget prossegue asseverando que "se as matemáticas se adaptam à realidade é por que o sujeito, ele próprio sendo a

[27] "Quant à l'espace, Thom part d'une alternative que je prétends précisément avoir levée: ou un espace exterieur physique, ou une construction du sujet. Ma réponse est, au contraire, que, si les mathématiques s'adaptent à la réalité, c'est que le sujet, en ses sources organiques, est un objet physico-chimique et spatial parmi les autres, et que, en construisant ses structures cognitives, il part donc des sources neurologiques et biologiques dont les lois sont celles du réel: c'est ainsi par voie surtout endogène, et non pas seulement exogène, que l'espace construit par le sujet s'accorde avec l'espace extérieur: ils existent donc tous deux sans conflit et convergent sans se confondre" (PIAGET, In: PIATTTELLI-PALMARINI (Ed.) 1979, p. 510).

[28] "Quanto ao espaço, Thom parte de uma alternativa que eu pretendo precisamente ter retirado: ou um espaço exterior físico, ou uma construção do sujeito. A minha resposta é, pelo contrário, que, se as matemáticas se adaptam à realidade, é porque o sujeito, nas suas fontes orgânicas, é um objeto físico-químico e espacial entre outros, e que, ao construir as suas estruturas cognitivas, parte, pois, das fontes neurológicas e biológicas, cujas leis são as do real: é assim, por via sobretudo endógena, e não apenas exógena que o espaço construído pelo sujeito concorda com o espaço exterior; portanto, existem os dois sem conflitos e convergentes sem se confundirem". (PIAGET (b) In: PIATTELLI-PALMARINI (ORG.), 1987, p. 497).

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

um só tempo espacial e físico-químico, engendra estruturas cognitivas cujas fontes são advindas do próprio real". Deste modo, Piaget vê que o que se dá é uma construção que se processa tanto exógena quanto endogenamente. Faz parte de seu construtivismo assumir a mão dupla exógena/endógena da construção do conceito de espaço. Assim o espaço exterior, que em princípio não depende do sujeito, e por esta razão tem sua própria autonomia, coincide com o espaço construído pelo sujeito.

Vejamos o ponto de vista expresso por Stephen Smale [21]. Em uma entrevista concedida a Szpiro e publicada em um boletim da *American Mathematical Society* AMS, Stephen Smale responde sobre a superioridade da eficácia da matemática para a explicação dos fenômenos em comparação com aquela descrição fornecida pelas narrativas[29],[30]. Smale argumenta que esta eficácia se explicaria "pelo fato de que nós podemos olhar para as leis universais mais facilmente com a matemática do que sem ela". Cita como exemplo emblemático a adequação da matemática para coisas distintas como a queda de uma maça e o movimento dos planetas ao redor do Sol como partes de um mesmo fenômeno. Em suma, no parecer de Smale, seria a matemática que nos possibilitaria, enquanto linguagem, tratar de aspectos aparentemente distintos como partes de um fenômeno amplo.

Smale[31],[32] também, apesar de se autoproclamar como defensor de provas rigorosas, não as supervaloriza no sentido de elevá-las a um objetivo que seja o único realmente nobre para um matemático. No sentido do diálogo com o mundo real, Smale concebe que provas rigorosas são em muitos casos algo de secundária importância para enxergar *como as principais estruturas emergem e se relacionam com partes do mundo real*.

O que podemos concluir desta entrevista é que deve existir uma espécie de *intuição* que *conecta estruturas matemáticas que emergem e se relacionam com partes*

---

[29] "*Szpiro: Why is mathematics so effective in explaining phenomena, as opposed to, say, narratives?*
Smale: [...] Mathematics is so effective because one can look for universal laws more easily with mathematics than without. It enables us to abstract the main ideas. With formalization and symbols one is able to see what is universal. The abstraction allows us to see universal ideas. I have been very inspired by Newton who could see a falling apple and the motion of planets and recognize them as part of the same phenomenon. I would like to see a language that allows us to translate what we see and then recognize it as part of a broad phenomenon" (2007, p.995)

[30] "Szpiro: Por que, diferentemente das narrativas, a matemática é tão eficaz para a explicação dos fenômenos?
Smale: A matemática é assim tão eficaz porque pode-se olhar para leis universais mais facilmente com a matemática do que sem ela. Isto nos habilita a abstrair as ideias principais. Com formalismo e com símbolos alguém pode ver o que é universal. A abstração nos permite enxergar ideias universais. Eu tenho me inspirado bastante em Newton pois ele foi quem pôde enxergar e reconhecer que uma maça em queda e o movimento dos planetas são ambos partes de um mesmo fenômeno. Eu gostaria de ver uma linguagem que nos permite traduzir o que nós enxergamos e então reconhecemos como parte de um fenômeno mais amplo" (tradução para o português da nota de rodapé precedente).

[31] Smale: "[...]I'm rigorous, I try to have things correct, but sometimes proofs are almost secondary to seeing how the main structures are laid out. I look at relationships between mathematics and eventually between parts of the real world" (2007, p. 996).
[32] Smale: Eu sou rigoroso, eu tento obter coisas corretas, mas algumas vezes provas rigorosas são quase secundárias para enxergar como as principais estruturas emergem. Eu laço o meu olhar para as relações entre a matemática e eventualmente partes do mundo real" (tradução para o português da nota de rodapé precedente).

do mundo real. Bem entendido, a palavra *intuição* não é utilizada por ele e aqui assume, na nossa interpretação, um sentido livre que não é necessariamente o mesmo daquele emprestado pela *escola intuicionista* da matemática. É necessário ressaltar que essa *conexão* aludida requer necessariamente que se imponha alguns *a priori* a fim de contornar o mundo e supomos que encontrá-la é parte de uma espécie de intuição. Embora essa intuição não seja de origem lógica, é mister considerar que ela, por outro lado, não é contrária à lógica e que além disso a lógica a respalda quando devidamente trazida para uma formulação que a obedeça. Em outras palavras, deve haver um certo **isomorfismo** entre as leis do mundo real, as quais não há porque serem ilógicas e as estruturas cognitivas de nossa mente, ou seja, as estruturas de nosso próprio pensamento.

Isto posto, vejamos como podemos conjecturar sobre possíveis explicações para a adaptação maravilhosa da matemática à realidade física tendo em vista o que até então discutimos neste trabalho.

Não vamos considerar a atitude do *Ignorabimus* que pode ser caracterizada pela concepção segundo a qual *não entendemos e nem merecemos*. Aliás, pensamos que seria mais condizente com a dignidade humana que disséssemos que merecemos sim e que podemos entender, pelo menos um pouco, acerca dessas conexões. Vejamos a atitude *deflacionária*. Ora, no curso do presente artigo ressaltamos *que se trouxermos à baila o conceito de limite do cálculo infinitesimal, o conceito de logaritmo de um número numa dada base, os conceitos de função logarítmica, função hiperbólica $y(x) = 1/x$ e o número* ***e*** *, então veremos com facilidade que esta função hiperbólica somente será a derivada exata da função logarítmica se e somente se a base escolhida for exatamente o número* ***e****. E tudo isso no contexto da matemática pura. Deste modo, se encontrarmos no mundo fora da matemática pura um fenômeno físico que admita ser descrito por uma função hiperbólica do tipo $P \sim 1/V$, então a conexão entre a matemática pura e a realidade física revela-se transparente.* Em outras palavras, se encontrarmos um fenômeno que possa ser descrito por uma hipérbole deste tipo, então o número **e** pode perfeitamente ser compreendido como expressão de uma realidade física também. Dizer que isso se constitui em uma explicação do tipo *deflacionário* ou ainda do tipo 'carta marcada', não nos parece satisfatório, pois a matemática se adapta a vários modelos de realidade física, inclusive modelos não necessariamente convergentes.

Concebemos que tudo isso se dá muito mais segundo um *isomorfismo parcial e adaptativo* entre, por um lado, as estruturas de nossa mente, incluindo evidentemente a lógica, e, por outro, as estruturas do mundo concreto e real que permitem adaptações, tal como aquelas advindas de necessários *a priori* que são impostos ao mundo para o conhecermos. Assim, a geometria euclidiana descreve parcialmente o mundo, como também as geometrias não euclidianas o descrevem parcialmente e vários outros modelos de realidade podem, dentro de certos limites, descrever o real.

O mundo real existe e em larga medida é independentemente de nós próprios. No entanto, quando estabelecemos uma conexão entre o mundo e nossas estruturas cognitivas, então um diálogo adaptativo se estabelece e este pressupõe algum tipo de isomorfismo parcial.

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

Na medida do raio da Terra por Eratóstenes, foi usada a geometria euclidiana e neste procedimento subjaz a ideia que os raios solares se propagam em linha reta. Mas se fosse, em princípio usada a geometria riemanniana, acreditamos que resultados também aceitáveis seriam obtidos apesar de, assim supomos, demandarem muito mais trabalho.

11. Discussão integradora

Relembrando o nosso objetivo precípuo neste trabalho, diríamos que fomos tocados pelas inquirições de Einstein e Wigner sobre a estupenda adaptação da realidade física à matemática, que é algo que em muitos casos foge de nossa compreensão. Claro está que no caso da geometria elementar esta conexão parece muito mais simples pois os objetos do mundo platônico das ideias puras como triângulos, círculos e outras figuras perfeitas encontram contrapartida no mundo concreto de triângulos e círculos reais. Assim, entendemos as conexões entre retas, planos e volumes ideais com, respectivamente, retas, planos e volumes reais.

No caso analisado da medida do raio da Terra, pudemos notar que Eratóstenes identificou o espaço físico concreto que engloba o Sol e a Terra com o espaço abstrato da geometria euclidiana. Poder-se-ia alegar que a teoria aristotélica dos dois mundos qualitativamente distintos poderia ter representado uma barreira para a supracitada associação, mas que isso não se deu pois a Escola de Alexandria não parece ter sofrido uma influência aristotélica assim tão determinante.

No caso da conexão entre os números **e** e **π** com a realidade, a situação parece ser bem mais sutil. Ora, o número **e** já aparece no contexto da matemática financeira que, conforme a nossa discussão, e enquanto matemática aplicada, pertence a uma realidade de interesses socioeconômicos. Este número está relacionado com os conceitos matemáticos de logaritmo, de função hiperbólica e de limite[33] do cálculo infinitesimal; ademais, podemos identificar problemas físicos concretos nos quais a função hiperbólica emerge como descrição matemática, como no caso do gás ideal, o que faz com que a conexão entre a realidade física e o número **e** se apresente com clareza. Este número pode ser associado a um fator ponderal e a uma probabilidade que são capazes de relacionar as diferentes quantidades infinitesimais de densidade e de pressão das camadas atmosféricas em função da altura de tais camadas. Como este fator ponderal (ou esta probabilidade) se relaciona com o importante conceito de energia da física, então vemos que se associarmos a este fator a energia cinética, então constataremos o surgimento de integrais cujos cálculos nos conduzem inevitavelmente ao número **π**; assim as conexões se apresentam com clareza, embora com uma certa dose de sutileza. E esta clareza é fundamental para a atividade a contento de professores e de estudantes, não tão somente daqueles que abraçaram a matemática e a física, como, sem dúvida, também para professores e estudantes de outras disciplinas científicas. Decerto, o problema epistemológico dessa conexão por nós ventilada neste artigo, é mais profundo do que fomos capazes de enxergar. Certamente, contudo, o que enxergamos já é um bom começo e tem valor pedagógico capaz de encorajar estudantes

[33] O conceito de limite do cálculo infinitesimal (diferencial e integral) engloba tanto o conceito de derivada (cálculo diferencial) quanto o conceito de integral (cálculo integral).

ISSN 2316-1124
V.6, N.7 2017

e professores a voos mais profundos sobre este recorrente tema. Se não fosse um problema relevante, dificilmente teria sido capaz de tornar estupefatos Einstein e Wigner, e se estendermos o argumento para fontes ainda mais remotas, as questões profundas subjacentes a este intrigante problema dificilmente teriam deixado de tocar espíritos sutis como Pitágoras, Platão e Galileu. Parte importante disso tudo e de razoável relevância educacional é que quaisquer de nós, estudantes e professores, podemos também ser protagonistas desta belíssima sutileza.

12. Na direção de uma solução aproximativa para o problema, a título de conclusão

As pistas para esta maravilhosa conexão entre a matemática e a realidade física são tais que parecem sugerir a existência de uma espécie de *isomorfismo*, pelo menos parcial, entre as estruturas de nossa mente e as estruturas da realidade. Em outras palavras, as nossas estruturas mentais são lógicas, ou pelo menos parcialmente lógicas, o que nos habilita à faculdade cognitiva de procurar incessantemente uma correspondência entre essas estruturas lógicas no nosso diálogo complexo com a realidade, notadamente aqui no caso de nosso diálogo com a realidade física.

Não queremos dizer com isso que as estruturas da realidade sejam essencialmente lógicas nem tampouco ilógicas ou ainda nãológicas e sim que por um *processo adaptativo complexo necessariamente evolutivo*, sujeito a muitos erros e eventualmente a momentos de acertos, podemos perfeitamente conseguir algum sucesso em impor ao mundo algumas regularidades e extrair dessa imposição aproximativa alguns resultados muito relevantes. *Este processo, se por um lado requer a lógica, também a transcende e além disso envolve um diálogo enormemente complexo entre experiências e teorias.*

Contudo, o sucesso parcial que porventura obtivermos com esta imposição, não nos autoriza. apenas por isso, a concebê-lo como alguma correspondência ontológica exata com a realidade. Aliás, em qualquer caso o sucesso é sempre parcial.

Ora, a medida do raio da Terra por Eratóstenes pressupõe o Sol situado no infinito (ou seja muito longe), os raios solares se propagando em linha reta e o espaço no qual Terra e Sol estão imersos em um espaço físico concebido como o espaço receptáculo da geometria de Euclides. O maravilhoso acordo da medida do raio da Terra com esta mesma quantidade obtida mediante outros tanto referenciais teóricos não nos autoriza a considerar o espaço geométrico de Euclides como expressão ontológica da realidade física. Sabemos, já algum tempo, que tanto o espaço de Riemann quanto o de Lobachevsky têm ambos o mesmo direito enquanto teorias perfeitamente capazes de expressar aspectos múltiplos da realidade física. Ademais, e diferentemente do que se concebeu no caso da medida de Eratóstenes, a própria luz é vista como onda na ótica física e no eletromagnetismo de Maxwell, como entidade dual em mecânica quântica e assim por diante, o que mostra que o real físico pode ser descrito mediante muitos conceitos distintos, embora parcialmente conectados.

Einstein também ressaltou, em um contexto ligeiramente diferente, que os dois grandes conceitos de espaço (referidos anteriormente neste artigo) são livres escolhas humanas para contornar o real e nenhuma delas goza, em princípio, de algo mais especial com relação a outra.

Tudo isso sugere que um bom caminho para estudarmos essas conexões entre a matemática e a realidade seja o da assim chamada *Revolução Copernicana de Kant*. Em conformidade com esta adoção, para conhecermos o mundo temos necessariamente de impor certos *a priori* sobre ele para que tenhamos minimamente condições de contorná-lo. A ressalva de Popper à formulação da *Revolução Copernicana de Kant* original é fundamental pois a imprescindível necessidade de impor alguns *a priori* ao mundo, ainda que esses sejam enormemente bem sucedidos no mister de explicar o mundo, não necessariamente nos autoriza a considerá-los como *a priori* verdadeiros. De fato, quaisquer que sejam os *a priori* sobre o mundo, mesmo aqueles que se mostram mais bem sucedidos, não nos dão o direito de considerá-los como *a priori* verdadeiros. De fato, eles são todos, e continuarão a sê-los, eternamente conjecturais. Deste modo concebido, *a aventura do conhecimento constitui-se em um processo evolutivo adaptativo complexo e eternamente recorrente*.

Ressalva também muito importante é que a lógica, em que pese imprescindível para a depuração de inconsistências, contradições e absurdos, ela por si só não é suficiente para a formulação de ideias novas, o que requer um processo genuinamente criativo humano ao impor esses *a priori* e estabelecer *as correspondências entre as nossas estruturas cognitivas e as estruturas objetivas do mundo, sendo essas últimas, independentes de nós próprios.*

Também Piaget, no contexto da psicogênese, se refere a um processo adaptativo e evolutivo entre um espaço engendrado pelas nossas estruturas cognitivas enquanto seres espaciais, físicos, químicos e biológicos e o espaço real exterior. Trata-se da procura de correspondência entre aquilo que concebemos a partir de nossas estruturas cognitivas internas com um mundo exterior que, em princípio e em larga medida, não depende de nós.

Também Smale atribui a um processo que aqui chamaríamos de adaptativo segundo o qual a invenção de um conceito unificador matemático como o constituído pela lei matemática da interação universal de Newton é o expediente cognitivo que melhor se adapta para enquadrar em um mesmo contexto tanto a queda livre de uma maçã quanto o movimento de um planeta ao redor do Sol, quanto ainda o movimento de um satélite ao redor de seu planeta. As narrativas, diferentemente das estruturas matemáticas, não ofereceriam esta potencialidade que a matemática ofereceria para tratar de uma gama enorme de fenômenos diversos à luz de um mesmo princípio explicativo. No entanto, nem toda a matemática tem necessariamente que ter contrapartida na realidade. *Isto sugere que a ideia de um processo adaptativo e evolutivo que envolva um diálogo de experimentos e teorias mediadas pelo controle exercido pela lógica, seja de fundamental importância.*

Finalizando, e mais uma vez reiterando a nossa convicção, diríamos que julgamos que este trabalho constitui uma contribuição para o ensino de física, para a educação matemática, bem como para a epistemologia da matemática e a epistemologia das ciências físicas orientadas para as questões de ensino.

Agradecimentos

Em um recente livro sobre Dirac, Bassalo e Caruso [22] escolheram uma epígrafe que privilegiava uma das facetas importantes do pensamento do físico inglês. Tomamos por empréstimo a mesma epígrafe para o presente artigo por considerarmos que ela expressa em belo tom as ideias aqui discutidas. Somos gratos a eles por isso. Agradecemos a Roberto Moreira Xavier de Araújo pelas férteis e sempre proveitosas discussões e por ter sugerido caminhos para esta abordagem. Um de nós (AP) agradece à CAPES pela concessão de uma bolsa para estudantes do Timor Leste no período de março a dezembro de 2012.

Referências

[1] A. EINSTEIN, **Geometry and Experience**, (Forma expandida da comunicação à Academia Prussiana de Ciências no dia 21 de janeiro de 1921) In: **Sidelights on relativity**, Disponível em: http://www.gutenberg.org/cache/epub/7333/pg7333.html

[2] E. P. WIGNER, **The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences**, *Communications in Pure and Applied Mathematics*, vol. XIII, 1960, p. 1-14. [Este importante artigo também pode ser encontrado no livro **The World Treasury of Physics, Astronomy and Mathematics**, editado por Timothy Ferris, Boston: Little, Brown and Company, 1991, p. 526-540]. O artigo também pode ser encontrado na página eletrônica: http://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

[3] E. SCHRÖDINGER, **Espírito e Matéria** (Conferências Tarner proferidas por Schrödinger no Trinity College de Cambridge em outubro de 1956), In: **O que é Vida? & Espírito e Matéria**, Lisboa: Editorial Fragmentos, s/d.

[4] B. RUSSELL, **Storia della Filosofia Occidentale**, Milão: Teadue, 1993.

[5] PLATÃO, **Leis**, Diálogos, In: Coleção Amazônica/Série Farias Brito, Volumes XII a XIII, tradução de Carlos Alberto Nunes Belém.: Editora da Universidade do Pará, 1980.

[6] PLATÃO, **Laws,** *Dialogues*, In: 'Great Books of the Western World', Vol. 7. Plato, Chicago: Encyclopaedia Britannica, INC., tradução de Benjamin Jowett, 1952

[7] L. DA VINCI, **Aforismi, novelle e profezie**, Roma: Tascabili Ecomonici Newton, 1993.

[8] N. COPÉRNICO, **As Revoluções dos Orbes Celestes**, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, tradução de A. Dias Gomes e Gabriel Domingues com Notas e Introdução de Luis Albuquerque, 1984 [trata-se da primeira tradução para o português do original em latim **De Revolutionibus Orbium Coelestium** de 1543].

[9] G. GALILEI, **O Ensaiador**, In: Coleção Os Pensadores. São Paulo: Nova Cultural, Vol. Galileu& Newton, 1987. [Obra originalmente publicada em italiano em 1623]

[10] ARISTÓTELES, **Del Cielo**, In: Obras de Aristóteles, Madri: Aguilar, tradução do grego de Francisco Samaranch, 1964

[11] ARISTÓTELES, **On the Heavens**, In: 'Great Books of the Western World', Vol. 8. Aristotle I, Chicago: Encyclopaedia Britannica, INC., 1952.

[12] A. KOYRÉ, **Études Galiléennes**, Paris: Hermann, 1966.

[13] M. DORATO, *Why is the language of nature mathematical?* In: G. ANTONINI, G; A. ALTAMORE, (Eds.), **Galileo and the Renaissance Scientific Discourse,** Roma: Edizioni Nuova Cultura, 2010, pp.65-71.
Disponível em: http://host.uniroma3.it/dipartimenti/filosofia/personale/galileomat.pdf

[14] S. FRENCH, *Models and Mathematics in Physics: the Role of Group Theory*, in J. Butterfield, C. Pagonis (eds), *From Physics to Philosophy*, Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[15] S. FRENCH**.** The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics. *Synthese* 125 (1-2), 2000

[16] A. EINSTEIN, Prefácio (foreword), In: MAX JAMMER, **Concepts of Space**, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 2ª ed., 1970

[17] I. KANT, **Crítica da Razão Pura**, In: Coleção *Os Pensadores*, Vol. Kant I, tradução de Valerio Rohden e Udo Baldur Moosburger, São Paulo: Nova Cultural 1987

[18] K. R. POPPER, Towards an Evolutionary Theory of Knowledge, In: A World of Propensities, Bristol: Thoemmes, 1990

[19] J. PIAGET, **Théories de langage, Théories de l'apprentissage (Le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky)**. In: PIATTELLI-PALMARINI (Ed.), Paris: Éditions du Seuil, 1979.

[20] J. PIAGET, **Jean Piaget & Noam Chomsky debatem Teorias da Linguagem e Teorias da Aprendizagem**. In: PIATTELLI-PALMARINI (Org.), Lisboa: Edições 70, 1987.

[21] G. SZPIRO, **Interview with Stephen Smale**, *Notices of AMS*, setembro de 2007. p. 995-997. Disponível em: http://www.ams.org/notices/200708/tx070800995p.pdf

[22] J. M. F. BASSALO & F. CARUSO, **Dirac**, São Paulo: Editor Livraria da Física, 2013